

**L'ORIGINE DE LA THEORIE FINANCIERE :
UNE REEVALUATION DE L'APPORT DE LOUIS BACHELIER**

Franck JOVANOVIC
GRESE, Université Paris 1[‡]

Aujourd'hui, la naissance de la théorie financière semble parfaitement datée : le 29 mars 1900, Louis Bachelier soutient sa thèse d'Etat intitulée *Théorie de la spéculation* qui « peut être considérée comme le point de départ de la finance moderne, et la racine lointaine du concept d'efficience informationnelle dans son acceptation probabiliste » (Walter [1996], 875). Tous les auteurs s'accordent à reconnaître dans cette thèse l'origine de la modélisation des fluctuations des cours boursiers régies par le hasard. Ainsi, « Bachelier a, le premier, développé une théorie mathématique des prix des actifs financiers fondée sur l'hypothèse d'indépendance des variations de cours, c'est-à-dire sur le modèle de promenade aléatoire » (Charreaux [1997], 1898). Ou encore, « c'est Bachelier qui le premier posa en termes probabilistes le problème de la variation des prix boursiers [...]. La théorie des fluctuations régies par le hasard n'existait donc pas et c'est Bachelier qui la créa » (Mandelbrot [1966], 56). Cette évidence est si bien établie que l'histoire de la naissance de la théorie financière semble être définitivement écrite.

Il paraît alors facile de comprendre ce que Bachelier a découvert, en lisant les différents articles qui lui sont consacrés et dans lesquels il est présenté comme un formidable précurseur : on lui attribue ainsi la paternité de certaines propriétés fondamentales du mouvement brownien¹, sans toutefois qu'il ne la revendique. Pourtant il est permis de s'interroger sur le contenu de cette thèse. Dans les ouvrages postérieurs à sa thèse, il présente à plusieurs reprises un projet général : construire une théorie générale et unifiée du calcul des probabilités. Bien qu'il n'ait jamais retenu

[‡] Maison des Sciences Economiques, 106-112 boulevard de l'Hôpital, 75013 Paris.jova@univ-paris1.fr. Je souhaite remercier tout particulièrement Philippe Le Gall pour son aide et ses commentaires ainsi que Jean Berthon, Yves Breton, Bernard Bru, Gunther Capelle-Blancard, Annie L. Cot, Pierre Crépel et les deux rapporteurs anonymes. Je reste seule responsable d'éventuelles erreurs.

¹ L'attribution de cette paternité a été mise en avant dans différents articles et en particulier par Mandelbrot [1966] et Samuelson [1965]. Sur l'histoire du mouvement brownien, on consultera Maiocchi [1990] et Dimand [1993].

l'attention, ce projet montre pourtant que Bachelier ne s'intéresse pas à la théorie financière pour elle-même mais parce qu'elle constitue un bon exemple pour introduire et étudier les probabilités en temps continu. On se trouve donc face à un paradoxe : Bachelier est censé avoir créé la théorie financière alors qu'elle ne présente que très peu d'intérêt pour lui. Si on reprend l'introduction de sa thèse, son objectif est beaucoup plus simple que ce qu'on a voulu y voir : « la recherche d'une formule qui exprime [la loi de probabilité des variations de cours qu'admet le marché à un instant donné] ne paraît pas jusqu'à ce jour avoir été publiée ; elle sera l'objet de ce travail »² ([1900], 22). Sa thèse consiste donc à établir une formule qui exprime une loi de probabilité. Plus précisément, d'après son projet général, elle lui sert à étudier le calcul des probabilités et non la théorie financière. En d'autres termes, il n'y a aucune raison de penser qu'il a créé cette dernière. Son apport résidant dans une démonstration mathématique, aurait-il pu alors s'inspirer de travaux financiers déjà existants ? Autrement dit, la théorie financière existait-elle déjà en 1900 ? Peut-on établir une généalogie du modèle de Bachelier et ainsi mieux identifier sa contribution ?

Cette recherche m'a ainsi conduit à trouver un auteur aujourd'hui oublié, Jules Regnault, qui, dès 1863, avait posé l'essentiel des bases de la théorie des fluctuations des cours boursiers régies par le hasard. Son *Calcul des chances et philosophie de la Bourse* propose pour la première fois de représenter les fluctuations des cours boursiers par un modèle de marche aléatoire qui de plus s'appuie sur une théorie économique. On trouve également dans cette analyse théorique les principales hypothèses sur lesquelles repose la théorie de l'efficience informationnelle³. Bachelier n'y fait aucune référence ; pourtant, la similitude entre sa thèse et cet ouvrage conduit à envisager un rapprochement entre ces travaux. La reconstruction de cette généalogie est intéressante à deux points de vue. D'une part, elle explique le contenu économique de la thèse de Bachelier. D'autre part, elle éclaire du même coup l'apport de cette thèse : la modélisation mathématique. Il est alors possible de réévaluer la contribution de Bachelier à la théorie financière. Précisons que notre intérêt n'est donc pas ici de trouver en Regnault, par une démarche trop rétrospective, un précurseur des théories financières contemporaines. Nous ne souhaitons pas non plus réduire le rôle joué par Bachelier dans la construction de la théorie financière mais au contraire de le préciser. Cet article souhaite ainsi éclairer la construction progressive de la théorie financière en

² Nos italiques.

³ La théorie des marchés efficients est étroitement liée au modèle de marche aléatoire –voir LeRoy [1989].

analysant, dans leur contexte, les conditions qui ont permis les travaux de deux théoriciens financiers importants, dont l'un est aujourd'hui oublié.

La première partie de cet article présente un état de la théorie financière avant Bachelier. Jusqu'à présent, la naissance de la théorie financière a été identifiée à la thèse de Bachelier, ignorant ainsi certains travaux sur lesquels cet auteur a pu s'appuyer. Parmi ces travaux, le modèle de Regnault mérite une attention toute particulière. La seconde partie tente alors d'établir l'apport de Bachelier à la théorie financière. A la différence des études précédentes qui se sont essentiellement focalisées sur sa thèse, il s'agit ici de replacer cette dernière dans son projet général. L'étude de ce projet et des travaux de Regnault permet de relativiser le caractère précurseur du modèle financier de Bachelier, tout en révélant sa contribution mathématique qui marque une étape importante dans la construction de la théorie financière.

1. L'ETAT DE LA THEORIE FINANCIERE AVANT BACHELIER

1.1. LES PREMIERS DE TRAVAUX THEORIQUES

La théorie financière en tant que champ disciplinaire s'est construite progressivement en se démarquant de deux courants longtemps dominants qui traitaient des marchés financiers : celui des actuaires et celui des juristes. En dehors de ces courants, les publications traitant des marchés financiers, surtout constituées de recettes, d'anecdotes ou de descriptions du fonctionnement des marchés, ne présentent qu'un faible intérêt théorique. Cependant, à la fin du XIX^e siècle, deux auteurs vont proposer des approches originales, posant ainsi les fondements de la théorie financière⁴.

L'un des premiers travaux novateurs de cette époque est la représentation graphique des opérations de Bourse faite en 1870 par Henry Lefèvre, secrétaire particulier de James de Rothschild et collaborateur du *Journal des Actuaires Français*. Elle permet de représenter la fonction de gain d'un joueur dans un plan, dont l'axe des abscisses représente les différents cours possibles et l'axe des ordonnées le gain ou la perte de l'opération. Il est donc possible de visualiser directement les issues possibles d'une opération de bourse quelle qu'en soit la complexité⁵. Leur simplicité et leur rigueur ont certainement permis de les diffuser parmi un large public puisque

⁴ On peut ancrer ces deux pionniers dans un courant plus large qui regroupe les travaux d'économistes de la seconde moitié du XIX^{ème} siècle qui ont permis la reconnaissance des marchés à terme et de la spéculation –voir Frèrejovan du Saint [1893].

⁵ Pour une présentation des travaux financiers de Lefèvre, voir Jovanovic [2002].

d'après Walras ([1880], 370), ils ont rendu la Bourse plus abordable aux non initiés. Trente ans après leur conception, ces graphiques réapparaissent dans la thèse de Bachelier mais sans que ce dernier ne cite de source⁶.

Le second précurseur, Jules Regnault, propose pour la première fois de modéliser les fluctuations des cours boursiers par un modèle de marche aléatoire. On ne connaît rien de précis sur cet auteur, mais son étude laisse supposer qu'il s'agit d'un opérateur qui travaillait sur les marchés financiers⁷. Bien qu'il soit aujourd'hui oublié, son travail ne passe pas inaperçu à l'époque et intéresse certains actuaires. En particulier, cette possibilité d'assimiler la Bourse à un jeu de hasard séduit Emile Dormoy [1872-1873] qui reprend la « loi des écarts » que l'on trouve chez Regnault⁸. Son ouvrage a certainement circulé parmi les opérateurs financiers, car il est mentionné dans un petit livre de 1910 proposant une méthode pour gagner à la Bourse⁹. Dans ce livre, Gherardt reprend non seulement le modèle de Regnault –tout en actualisant ses résultats– mais, ce qui est ici plus intéressant, il lui associe la thèse de Bachelier. Il est donc intéressant d'étudier plus en détail ce modèle.

1.2. L'ÉPISTEMOLOGIE DE JULES REGNAULT : LES SOURCES DE SON MODÈLE

Le modèle de Regnault constitue une réponse scientifique à certaines préoccupations de son époque. La manière dont il explore et construit cette nouvelle discipline est subordonnée à une méthode particulière. Cette dernière est basée sur des analogies avec les lois générales de l'univers, le conduisant à proposer un système de double test pour valider son modèle.

1.2.1. Une réponse scientifique à des problèmes moraux

Le livre de Regnault s'inscrit dans un contexte de condamnation morale des pratiques de l'agiotage et de suspicion à l'égard des marchés à terme. Il offre alors une réponse scientifique à

⁶ Dans son compte rendu du *Calcul des probabilités* de Bachelier, Keynes [1912] s'étonnait déjà de l'absence de référence –la seconde partie de cet article revient sur cette question.

Notons également que cette approche graphique des opérations de bourse est encore utilisée aujourd'hui dans un but pédagogique.

⁷ Jusqu'à présent, mes recherches ne m'ont pas permis d'en découvrir davantage. Notons qu'il existe une erreur dans le tome du dictionnaire Lorenz qui traite des années 1840-1865: il attribue à J. Regnault plusieurs ouvrages qui sont en fait de J.J. Regnault, conducteur des Ponts et Chaussées, qui signait certains de ses livres J. Regnault.

⁸ Hermann Laurent cite également Regnault dans la bibliographie de sa *Théorie des jeux de hasard* [1893] et dans son *Calcul des probabilités* [1873].

⁹ Son auteur, Maurice Gherardt, applique, dans ses différents ouvrages, la méthode et la « loi des écarts » à différents jeux de hasard –les courses de chevaux, la roulette, etc.

ces problèmes¹⁰. Regnault prend la défense de ces marchés et condamne l'agiotage. Cependant, son approche est totalement nouvelle car sa condamnation ne s'appuie ni sur la morale ni sur le droit mais sur les comportements économiques des agents –qui sont conduits par leur intérêt individuel– et sur une démonstration rationnelle –que l'on pourrait qualifier de « scientifique »– de la ruine inévitable des agioteurs¹¹. Le problème que se pose Regnault est délicat : comment condamner une pratique sans dénigrer l'ensemble des marchés financiers ou encore, comment distinguer ces « deux espèces de variété de spéculation » dont l'une est « l'abus et le parasite » de l'autre ([1863], 102) ? Sa réponse consiste à tracer une frontière entre l'agiotage –qu'il nomme le « jeu »– et la « spéculation » qui repose sur le degré d'utilité de chaque opération :

« la fréquence des opérations constitue l'abus ; et l'unique mobile de tout échange étant et devant être l'utilité, toutes les fois que l'utilité disparaît, il y a erreur ou mauvais usage ; nous pouvons partir de cette donnée pour tracer une ligne de démarcation entre l'agiotage et la spéculation » ([1863], 105).

Regnault tient son *criterium* : la fréquence des opérations et leur utilité aussi bien individuelle que collective¹². Il peut alors distinguer les différentes opérations et condamner le jeu sur les marchés financiers afin d'encourager la « véritable spéculation ». Sa condamnation de l'agiotage consiste à démontrer, modèle à l'appui, qu'il n'est pas possible de faire de gains certains à la Bourse sur une courte période et par conséquent, les frais de courtage qui greffent chaque opération ruinent nécessairement le joueur. L'élaboration de son modèle s'appuie sur une méthode d'analyse liée aux thèses déterministes de l'époque.

1.2.2. Un cadre d'analyse déterministe

La construction de Regnault est marquée par le déterminisme du XIX^{ème} siècle qui conditionne trois points importants de sa pensée.

¹⁰ A cette époque, l'agiotage désigne les opérations à découvert. Rappelons que l'agiotage est désigné comme responsable de la crise économique et financière d'ampleur internationale qui s'est déroulée de 1857 à 1860. Ainsi, cette question a suscité un certain nombre de débats et réflexions chez les économistes français de cette époque. Sur l'influence de ce contexte sur le travail de Regnault, voir Jovanovic et Le Gall [2001].

¹¹ Regnault oppose aux condamnations morales une démonstration scientifique basée sur la preuve : « La morale, sous toutes ses formes, n'a pas manqué, jusqu'à présent, pour attaquer les abus de la spéculation et essayer de les corriger [...]. Ne vaut-il pas mieux démontrer au joueur comment le cours naturel des choses veut qu'il soit inévitablement ruiné à tel jour donné, que de lui faire sentir que s'il s'enrichit, ce ne peut être qu'en dépouillant son semblable? Or, cette vérité peut lui être prouvée, parce qu'elle peut-être prévue » ([1863], 1-2).

¹² Regnault analyse les conséquences de ces deux types de comportement sur l'ensemble de la collectivité et montre que seule la véritable spéculation est profitable collectivement ([1863], 102).

Tout d'abord, le déterminisme suppose que l'Univers est gouverné par les mêmes lois. L'état futur de l'Univers est alors parfaitement prévisible pour un être dont la connaissance est parfaite. Cependant, l'homme, du fait de son ignorance, est contraint d'estimer les causes responsables des phénomènes en fonction de ses propres connaissances –attribuant au hasard les causes qu'il ignore. Il s'agit donc d'une approche subjective des probabilités que l'on retrouve chez Regnault :

« Il n'y a point de hasard, mais il y a notre ignorance qui en tient lieu ; c'est l'ignorance qui, en nous faisant méconnaître la liaison nécessaire de tous les effets, berce nos illusions et nos erreurs » ([1863], 2).

Ensuite, cet état incomplet des connaissances conduit à distinguer les causes accidentelles –liées à notre ignorance– des causes constantes –parfaitement prévisibles. Le scientifique en recourant à la loi normale peut alors éliminer les causes accidentelles –qui se compensent– pour faire apparaître les seules causes constantes. Il identifie alors les lois constantes de l'Univers. Regnault reprend ce découpage pour différencier le jeu de la spéculation : le joueur s'intéressant uniquement aux causes accidentelles tandis que le spéculateur n'étant concerné par les seules causes constantes. La loi normale –bien qu'il n'emploie pas ce terme, la sous-section suivante revient sur ce point–, occupe ainsi dans son analyse une place centrale, et son utilisation est similaire à celle de Bachelier.

Enfin, Regnault adhère à la représentation d'un Univers régi par un petit nombre de lois simples et immuables. Il considère que « le monde moral ne se gouverne pas par d'autres lois que le monde physique » ([1863], 5). Cette représentation unifiée du monde lui donne ainsi la possibilité de transposer aux sciences sociales des formalismes issus des sciences naturelles et plus encore, de leur adosser ses résultats.

« Par la Théorie des Ecarts, les lois nouvelles des variations de la Bourse sont enfin fixées, et il devient évident que les lois du monde social ne sont ni plus difficiles, ni plus compliquées que celle du monde céleste. Tout dans la nature est soumis à des lois communes, générales et immuables, en dehors desquelles aucune chose, aucun phénomène ne pourrait se produire ou se maintenir » ([1863], 7).

Il faut bien se rendre compte de l'importance, pour Regnault, de pouvoir adosser ses résultats à des lois universelles. Sa conception unifiée du monde lui permet en effet de recourir à des analogies avec les sciences naturelles et d'opérer des transferts de méthodes, de concepts et d'instruments pour explorer un phénomène social particulier –les mouvements boursiers– et de

bâtir un nouveau champ disciplinaire –la théorie des fluctuations des cours boursiers. Ce cadre d'analyse déterministe lui permet ainsi de recourir à une méthode d'investigation particulière.

1.2.3. Sa méthode d'investigation

Sa conception unifiée du monde le conduit à utiliser aussi bien un raisonnement inductif que déductif. Pour illustrer ce point, attardons-nous sur la manière dont il construit sa théorie des écarts en cinq étapes successives. Première étape, à partir de l'observation et d'un raisonnement logique, il suggère une relation théorique entre deux variables : le temps et l'écart des cours. Ce travail se base sur un nombre considérable d'observations puisqu'il rend compte de plus de 900 données portant sur la période 1823-1862. Deuxième étape, l'observation empirique de ces variables lui permet d'induire deux liens : d'une part, « *les écarts sont égaux pour des temps égaux* »¹³ ([1863], 49), et d'autre part, « *les écarts vont en diminuant pour des temps plus rapprochés, en augmentant pour des temps plus éloignés* » ([1863], 49-50). Troisième étape, il déduit de ces liens sa loi des écarts : « l'écart des cours est en raison directe de la racine carrée des temps » ([1863], 50). Quatrième étape, il propose un parallèle entre des lois naturelles déjà connues et cette nouvelle loi de manière à s'assurer de la justesse de cette dernière. Il se livre alors à diverses applications de cette loi dans le cadre de la théorie financière. Enfin, dernière étape, il teste empiriquement cette loi ([1863], 175-7)¹⁴.

Deux points importants peuvent ici être soulignés : d'une part, le poids considérable de l'observation, et d'autre part, le rôle central des lois naturelles pour confirmer ses résultats. Les données empiriques lui permettent non seulement d'amorcer son raisonnement mais aussi de le conclure. On remarque aussi que le test empirique ne vient qu'à la suite d'une comparaison avec des lois naturelles existantes et que les données d'observation lui servent à ajuster sa loi après qu'elle ait été « validée ». On peut donc dire qu'il existe une double validation : un test « extra-économique » puis un test « intra-économique ». De plus, cette place laissée aux lois naturelles montre bien l'importance de sa conception unifiée du monde dans son raisonnement. En fait, elles guident tout son raisonnement et sans cette confirmation par analogie, sa loi n'aurait pu être validée.

¹³ Regnault constate donc que la volatilité du prix de l'actif est constante.

¹⁴ Sur l'approche empirique ou, à certains égards, pré-économétrique de Regnault, voir Jovanovic et Le Gall [2001].

Cette influence méthodologique le conduit à appliquer aux calculs boursiers les principes mécaniques de la physique en recherchant des lois universelles et immuables calquées sur celles de la mécanique. Le *Calcul des chances et philosophie de la Bourse* peut alors être vu comme l'extension des lois générales de l'univers à un autre domaine, lui permettant ainsi de créer un nouveau champ disciplinaire : la théorie financière.

1.3. LE MODELE DU JOUEUR DE REGNAULT

L'objectif de Regnault est de condamner le jeu et d'encourager la véritable spéculation. Pour ce faire, il construit deux modèles, l'un relatif au jeu et l'autre à la spéculation ; le premier démontrant l'inévitable ruine du joueur et le second le possible enrichissement du spéculateur et de la nation¹⁵. L'intérêt du modèle du joueur est de proposer une modélisation des fluctuations des cours boursiers calquée sur le modèle probabiliste binomial qui correspond à un jeu de pile ou face. Regnault propose ainsi pour la première fois de modéliser les variations des cours boursiers par un modèle de marche aléatoire, qui repose sur des hypothèses originales pour l'époque et qui préfigurent la théorie de l'efficience informationnelle des marchés financiers. Toutefois, ne nous laissons pas tromper par cette apparente facilité. Bien que son raisonnement s'appuie sur un modèle, le *Calcul des chances et philosophie de la Bourse* ne contient ni démonstration ni formule mathématiques et les développements ne sont que littéraires¹⁶.

Son modèle est construit en deux étapes. Dans la première, Regnault construit un modèle théorique avec égale chance de gagner ou de perdre à chaque opération –modèle de marche aléatoire symétrique. Dans la seconde, il introduit ce qu'on appellerait aujourd'hui des coûts de

¹⁵ Pour une présentation du second modèle, voir Jovanovic et Le Gall [2001].

¹⁶ L'absence de développement mathématique ne doit pas nécessairement surprendre. Le XIX^e siècle est marqué en France par une série de controverses sur la méthode à utiliser en économie politique, et en particulier sur les rapports entre, d'une part, l'économie et les mathématiques, et d'autre part, l'économie et la statistique (Breton [1991], Ménard [1987], Zylberberg [1990]). Tout tend à montrer que l'absence de démonstration mathématique est voulue par Regnault : non seulement il maîtrise les raisonnements économiques mais également les calculs mathématiques et probabilistes. De plus, il était certainement au courant de l'opposition des économistes de l'époque sur l'utilisation des mathématiques. En effet, dans un paragraphe sur le problème de la valeur ([1863], § 54), il s'oppose, au sujet du calcul du bénéfice du producteur, à certains économistes sans les nommer : « Quelques auteurs ont prétendu donner des règles invariables pour la détermination du point précis où doit se fixer ce bénéfice ; mais il est aisé de voir qu'en se basant sur des données supposées quant au nombre et à la convenance des consommateurs, ils ont pris des hypothèses pour des réalités, et que sans cela, il y a toujours une inconnue qui ne permet pas de résoudre l'équation » ([1863], 113). Il y a fort à penser qu'il s'agit d'une attaque indirecte à la théorie de l'échange développée par Cournot en 1838 dans ses *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Or on connaît l'accueil glacial réservé par les économistes de l'époque aux travaux de Cournot (Breton [1991], Ménard [1978]).

transaction conduisant à modifier cette égale probabilité de gagner ou de perdre¹⁷. Notre présentation, qui se limite au modèle théorique –repris trente-sept ans plus tard par Bachelier–, s'articule en trois points. Les deux premiers étudient les deux facteurs responsables des mouvements des cours boursiers. Le dernier présente la « loi des écarts » à laquelle ce modèle aboutit.

1.3.1. Le premier facteur responsable du mouvement des prix : l'information

Un des fils conducteurs de l'étude de Regnault est le problème de l'information. Contrairement au spéculateur, le joueur ne s'intéresse qu'aux plus-values et son unique motivation est d'obtenir des résultats dans un laps de temps très court ne dépassant pas une liquidation¹⁸. Par conséquent, il cherche uniquement à bénéficier d'une variation plus ou moins brutale des cours. Il est donc concerné par les seules causes accidentelles et l'originalité de Regnault consiste à associer ces causes à des événements informationnels. En effet, les variations des cours résultent pour lui de l'arrivée de nouvelles informations sur le marché pour deux raisons. D'une part, le cours à un instant donné contient toute l'information :

« En vain [le joueur] prétendrait-il que ce n'est que des conséquences futures et lointaines qu'il voit ces motifs de hausse ou de baisse ; nous savons que ces conséquences, si elles existent, sont contenues dans le cours actuel ; or si on réfléchit à ce que veut dire le mot *valeur*, on verra que la valeur est et ne peut être déterminée que par le *cours* même » ([1863], 29-30).

D'autre part, le cours d'un titre reflète toute l'information puisque les intervenants basent leur évaluation de la valeur du titre sur les conséquences présentes mais également futures d'un événement :

« le cours n'est pas toujours uniquement déterminé par les circonstances présentes ; il comprend encore toutes les espérances légitimes qui peuvent être renfermées dans cette situation » ([1863], 23).

On trouve énoncés ici les principes essentiels de la théorie de l'efficience informationnelle des marchés financiers¹⁹.

¹⁷ Ces coûts de transaction sont tirés de l'observation de la Bourse et de son fonctionnement, le plus important étant les frais de courtage. Leur introduction permet à Regnault de démontrer la raison pour laquelle le jeu conduit nécessairement à la ruine des joueurs.

¹⁸ Au-delà d'une liquidation, le joueur voit ses gains rognés par le paiement d'un report nécessaire pour prolonger sa position.

¹⁹ Notons toutefois que si ces principes sont effectivement à la base de la théorie de l'efficience informationnelle des marchés financiers, Regnault ne peut être en aucun cas considéré comme étant à l'origine de cette théorie.

De ce premier facteur, Regnault déduit des conséquences théoriques et formule ainsi des hypothèses, traduites en langage probabiliste, nécessaires à sa modélisation. En effet, il explique qu'à « la Bourse, tous les événements possibles ne peuvent déterminer que deux effets contradictoires qui sont la *hausse* et la *baisse* » ([1863], 15). Ainsi, la probabilité que le cours augmente est égale à celle qu'il diminue, c'est-à-dire $1/2^{20}$. Si cette probabilité était différente de $1/2$, les joueurs pourraient faire un arbitrage en choisissant de suivre systématiquement le mouvement qui aurait la plus forte probabilité :

« Dans tous les jeux de hasard qui comprennent deux chances contraires, l'égalité relative résulte précisément de la faculté pour le joueur de choisir l'une ou l'autre chance à volonté : [...] si l'une des deux chances offrait un peu plus d'avantage que l'autre, c'est celle-là que l'on choisirait à tout coup » (Regnault [1863], 41).

Il précise alors que, comme dans un jeu de pile ou face, les mouvements des cours boursiers sont indépendants, c'est-à-dire que les mouvements et les cours passés ne permettent pas d'anticiper les variations futures :

« Il est certain que quand je joue à pile ou face, chaque coup est complètement indépendant des précédents, ou du moins n'a pas de dépendance appréciable [...]. De même à la Bourse, le joueur est toujours tenté de conjecturer ce qui doit arriver d'après ce qui est arrivé [...] bien qu'après tout il y ait complète indépendance entre ces divers effets » ([1863], 38).

En résumé, la seule chose connue avec certitude par le joueur est que, à chaque instant, le cours peut augmenter avec la probabilité $1/2$ ou baisser avec la même probabilité et cela indépendamment des cours passés. Par conséquent, l'espérance de gain du joueur est nulle²¹. Jusqu'à présent, Regnault propose un modèle de marche aléatoire similaire à ceux qui seront utilisés avec la théorie des marchés efficients. Cependant, il faut distinguer un second mouvement de court terme qui complète le premier.

1.3.2. Le second facteur responsable du mouvement des prix : l'hétérogénéité des agents

²⁰ En posant ce principe d'égalité, Regnault ancre son modèle dans les débats juridiques et moraux de l'époque sur les marchés à terme. On peut faire ici un parallélisme avec les conditions de la naissance du calcul des probabilités (Coumet [1970]).

²¹ Il est intéressant de noter que ces hypothèses du modèle du joueur font de ce dernier le modèle type de l'arbitragiste.

La nature subjective des probabilités affecte l'évaluation du titre et les cours boursiers. En effet, bien que l'information publique soit commune à tous les agents²², l'évaluation des effets de chaque événement sur les cours et par conséquent l'estimation de la « valeur »²³ d'un titre qui en résulte reste propre à chaque intervenant :

« Non-seulement il n'est pas un seul spéculateur qui, sans toujours s'en rendre un compte exact, n'ait une opinion plus ou moins nette au sujet des probabilités qu'il accorde à tel ou tel événement, mais il n'en est peut-être pas deux sur mille qui aient une même opinion sur l'ensemble des causes et de leurs effets » ([1863], 20).

C'est justement cette diversité d'opinions qui permet les échanges, car « si tout le monde avait les mêmes idées et appréciait également les mêmes causes, il n'y aurait plus de contreparties possibles » (Regnault [1863], 22). Si cette évaluation subjective de la valeur des titres financiers permet des échanges, elle n'est pas sans importance sur les mouvements des cours. En effet, étant subjectives, ces évaluations sont soumises à l'erreur, mais suivent pourtant une loi précise : la loi normale. Il justifie son point de vue à partir de l'exemple de l'évaluation de la taille d'un immeuble par un groupe d'individus²⁴. Si un grand nombre de personnes placées à une même distance d'un immeuble doit évaluer la taille de ce dernier, les estimations varieront d'une personne à l'autre. Cependant, ces estimations ne seront pas distribuées aléatoirement :

« Les nombres donnés par chacun des observateurs ne se présenteront pas au hasard et sans ordre, mais se grouperont, en vertu d'une certaine loi, de la manière la plus symétrique des deux côtés de la valeur moyenne ; si on divisait en parties égales la distance qui s'étend de cette valeur aux termes extrêmes, la valeur numérique de chaque groupe irait sans cesse en diminuant progressivement à mesure qu'on s'éloignerait de la valeur moyenne » ([1863], 25).

Il décrit ici, sans la nommer, la loi normale²⁵. En transposant ce raisonnement au marché boursier, il considère alors deux groupes d'opérateurs également répartis autour de la moyenne : les « haussiers » et les « baissiers ». Cette répartition permet d'expliquer les mouvements des cours lorsqu'aucune nouvelle information n'arrive sur le marché. La structure de répartition des différents intervenants conduit encore ici à la probabilité 1/2 que les cours augmentent ou diminuent à chaque instant.

²² Dans son analyse, Regnault distingue le caractère privé ou public de l'information. Cependant, il assimile les gains résultant de l'exploitation d'une information privée à un impôt fixe qui greffe les frais des non-informés et se concentre sur la seule information publique et les seuls agents non-informés.

²³ Je mets le terme de valeur entre guillemets parce que Regnault considère qu'il ne peut y avoir de valeur absolue d'un titre ([1863], 114).

²⁴ Cet exemple était courant à l'époque –voir Feldman et *alii* [1991].

En ce qui concerne le lien avec l'efficacité informationnelle des marchés, un point peut être souligné. L'idée d'efficacité traduit le fait que les prix véhiculent l'information et donc reflètent la valeur du titre. Pour Regnault, bien que chacun évalue différemment la valeur d'un titre, il est tout de même possible de connaître sa véritable « valeur ». Ainsi, « l'homme sensé »,

« qui se sait sujet à l'erreur [...] reconnaîtra sans difficulté que l'appréciation sur laquelle roule tout le débat, est par la force et la nature même des choses, la plus approchante et la plus exacte qu'il puisse se procurer » ([1863], 28).

Bien que cette valeur ne puisse pas être connue de manière absolue, le cours moyen peut donc être considéré comme la meilleure façon de l'approcher²⁶ et, du fait de la distribution des opinions des spéculateurs, les cours ne font que graviter autour de cette valeur.

Le modèle du joueur repose donc sur ces deux types de mouvements de court terme ; le premier résulte de l'arrivée de nouvelles informations sur le marché, le second de l'évaluation subjective des conséquences de ces informations. Ces hypothèses, traduites en langage probabiliste, permettent à Regnault de construire un modèle de marche aléatoire. Il reste maintenant à montrer de quelle manière Regnault obtient, à partir des cinq étapes résumées précédemment, sa « loi des écarts ».

1.3.3. La loi des écarts

Pour rendre compte et prévoir l'évolution des mouvements boursiers, il tire de ce modèle une loi de variation des cours dans le temps. Il procède en trois temps.

Tout d'abord, lorsqu'il engage une opération, le joueur –essentiellement préoccupé par sa plus-value ou sa moins-value– est dans une situation de relative incertitude. Face à cette incertitude, Regnault considère deux attitudes équivalentes : d'une part, engager des opérations dont la durée est incertaine mais dont l'écart réalisé –c'est-à-dire sa perte ou son gain– est toujours le même, ou d'autre part, engager des opérations de durée certaine mais d'écarts incertains. Toutefois, dans ce dernier cas, l'écart moyen pour une période de temps donnée peut être calculé et par conséquent a une valeur certaine. Il établit alors l'existence d'une « certaine

²⁵ Regnault ne nomme jamais explicitement la loi normale, mais ses représentations graphiques ([1863], 167) et de nombreux passages la décrivant laissent supposer qu'il raisonne effectivement sur cette loi.

²⁶ On retrouve ici les controverses du XIX^{ème} siècle sur la « théorie des moyennes ». Sur ces questions voir Feldman et *alii* [1991] et Desrosières [1993].

relation entre la *différence* présentée par une opération lorsqu'elle se liquide, et le *temps* donné à sa liquidation » ([1863], 48).

Ensuite, il déduit de ce lien la base de sa relation mathématique en collectant des données d'observation sur ces variables. Il constate que, sur une très longue période, les écarts moyens pour une période de temps donnée sont sensiblement égaux et que plus la période de temps considérée est courte, plus ces écarts sont faibles. De plus, si la période de temps considérée est réduite de moitié, l'écart est quant à lui divisé par moins que deux. De ces constatations, Regnault formule une relation mathématique entre ces deux variables :

« Il existe donc une loi mathématique qui règle les variations et l'écart moyen des cours de la Bourse [...], nous la formulons ici pour la première fois :
L'ÉCART DES COURS EST EN RAISON DIRECTE DE LA RACINE CARRÉE DES TEMPS » ([1863], 50).

Cette relation permet, à partir de l'écart moyen d'une certaine période de temps, de calculer l'écart d'une période de temps quelconque. En résumé, s'il n'est pas possible de prévoir exactement le cours futur d'un titre, on peut prévoir l'écart moyen pour une période donnée.

Enfin, il reste à valider cette loi. Regnault recourt alors à son système de validation double –extra-économique et intra-économique. Dans un premier temps, il commente et justifie son résultat en s'appuyant sur des principes issus d'une loi géométrique universelle²⁷ sur laquelle un grand nombre de probabilistes du XIX^{ème} siècle s'appuie, en particulier Quételet. Puis dans un second temps, il teste empiriquement sa loi²⁸. Sa démarche ne consiste donc pas en une démonstration mathématique de sa loi de la racine carrée, mais en une application de cette loi – qu'il emprunte à Quételet– aux variations des cours de la rente française.

Ce modèle théorique se résume en deux idées fondamentales. D'une part, en comparant le jeu à la Bourse à un jeu de pile ou face, Regnault montre qu'il n'est pas possible de prévoir avec certitude les mouvements et les cours futurs et que le gain moyen et l'espérance de gain sont nuls à chaque instant. D'autre part, bien que des prévisions exactes soient impossibles, on peut déterminer mathématiquement une loi des écarts. On notera aussi que les cours ne sont pas distribués au hasard mais que leur distribution suit une loi normale. En définitive, Regnault

²⁷ En particulier sur la loi géométrique qui indique que les rayons d'un cercle sont proportionnels aux racines carrées des superficies ([1863], 51).

²⁸ Pour une approche plus détaillée sur les tests utilisés par Regnault, voir Jovanovic et Le Gall [2001].

semble être le premier à avoir proposé un modèle de marche aléatoire pour expliquer les variations des cours boursiers. Il pose ainsi les principales bases de la théorie des marchés financiers que l'on retrouve en 1900, dans la thèse de Bachelier.

2. LA CONTRIBUTION DE LOUIS BACHELIER A LA THEORIE FINANCIERE

En 1997, au moment de recevoir le prix Nobel d'économie pour leurs travaux sur l'évaluation du prix des options, Merton [1998] et Scholes [1998] ont rappelé, dans leur discours, les travaux de Bachelier. Il s'agit d'un juste hommage à ce précurseur longtemps ignoré. Mais paradoxalement, si ces travaux sont aujourd'hui reconnus, ils n'en restent pas moins peu étudiés et en définitive on demeure incapable d'évaluer leur apport à la théorie financière. Le but de cette seconde section est précisément de comprendre le projet général de Bachelier et d'essayer de mieux cerner cet apport.

2.1. BACHELIER ET SON PROJET GENERAL

Peu de choses sont connues de Bachelier car la plupart des archives le concernant ont brûlé. Né le 11 mars 1870 et mort le 28 avril 1946, il enseigna à Besançon, Dijon, Paris, Rennes et fut professeur de mathématique à Besançon de 1927 à 1937. Il a soutenu devant Henri Poincaré sa thèse d'Etat, intitulée *Théorie de la spéculation*, à Paris le 29 mars 1900. Cette thèse de doctorat en mathématique s'intéresse *a priori* à un problème économique et cherche à déterminer la loi de probabilité qui permet d'évaluer les mouvements des cours boursiers²⁹.

De son vivant, malgré ses nombreuses publications, il n'est pas vraiment reconnu par le milieu universitaire français mais il ne reste pas pour autant totalement inconnu³⁰. Cependant, le véritable intérêt pour les travaux de Bachelier ne date que des années 1960³¹. A cette époque, sa thèse a été traduite en anglais et commentée dans un ouvrage collectif édité en 1964 par Cootner sur les premiers modèles de marche aléatoire. L'histoire a alors essentiellement retenu sa thèse

²⁹ L'essentiel des éléments biographiques connus sont présentés dans Mandelbrot [1995] et Bachelier [1921].

³⁰ Les économistes ainsi que les mathématiciens et physiciens français ont ignoré son travail. On peut citer l'exemple de Paul Levy qui ne prend conscience de l'importance des travaux de Bachelier qu'après avoir lu l'article fondamental de Kolmogorov [1931] dans lequel ce dernier présente « le cas de Bachelier ». Mais Keynes [1921] se réfère à son ouvrage sur les probabilités –en plus de son compte rendu de 1912– qui s'est très bien vendu hors de France (Bachelier [1921], 4) et son livre *Le jeu, la chance et le hasard* [1914] a connu un certain succès populaire. De plus, sa thèse est utilisée par Gherardt [1910].

³¹ Les travaux de Bachelier ont intéressé Paul Samuelson qui, en 1955, a écrit un article non publié intitulé "Brownian Motion in the Stock Market". L'année suivante, Richard Kruiuzenga, un des étudiants de Samuelson, cite les travaux

que l'on a isolé du reste de ses travaux. C'est pourtant dans ces derniers qu'il expose le projet qui guide l'ensemble de ses recherches.

Le projet général de Bachelier est très ambitieux : la construction d'une théorie générale et unifiée du calcul des probabilités sur la base exclusive des probabilités en temps continu³². Comme la préface du *Calcul des probabilités* [1912] l'explique, cette théorie doit permettre de classer tous les phénomènes réels pouvant être étudiés par le calcul des probabilités, en fonction de leurs principales caractéristiques –les conditions du jeu, le nombre de joueurs, le degré de hasard, le genre de probabilités³³. Sa thèse joue un rôle fondamental dans ce projet car elle introduit les nouveaux outils probabilistes et les nouvelles méthodes nécessaires à ce projet théorique. En d'autres termes, elle a donné naissance à la théorie des probabilités en temps continu :

« l'idée de considérer les probabilités comme continues *a priori* fut seulement envisagée il y a quelques années lorsque je me proposai de résoudre des problèmes analogues [à ceux que l'on s'était posés jusqu'alors] mais dont les solutions exactes devaient être nécessairement continues. La théorie édifée alors était relativement particulière ; il fallait la généraliser de façon qu'elle comprit les résultats connus avec beaucoup d'autres, il fallait aussi établir la classification des différents problèmes, d'après leurs caractères réels » ([1912], 153).

L'ensemble de ses ouvrages consiste donc à généraliser les premiers résultats présentés dans sa thèse et dans sa *Théorie mathématique du jeu* de 1901. Pour mener à bien ce projet, il lui faut trouver une structure mathématique suffisamment générale permettant d'analyser des phénomènes réels plus ou moins hétérogènes. Il propose alors d'assimiler et de réduire tous ces phénomènes étudiés à un jeu :

« Afin d'obtenir l'unité indispensable pour la classification des différents problèmes, nous ramènerons ceux-ci à un seul type, en supposant toujours qu'ils se rapportent à un jeu. Lorsqu'un problème n'est pas explicitement relatif à un jeu, on peut le considérer comme un cas particulier d'un problème relatif à un jeu [...]. La théorie des probabilités continues, pour être générale, devra donc être une théorie générale du jeu » ([1912], 154).

En retenant le jeu comme structure mathématique de base commune, Bachelier ôte aux phénomènes réels tout rôle direct dans la définition de cette classification qui est construite de manière abstraite et « basée sur des conceptions purement mathématiques » ([1912], VII). Le réel

de Bachelier dans sa thèse intitulée "Put and Call Options: A Theoretical and Market Analysis". C'est aussi à cette période que Mandelbrot contribue à la redécouverte de Bachelier.

³² Le problème de l'axiomatisation des probabilités est une question qui préoccupe les mathématiciens du début de ce siècle, en particulier Kolmogorov qui s'en saisira.

³³ Pour les définitions voir Bachelier ([1912], 155-6 et 403-4 ; [1913]).

n'a plus qu'à se mouler dans des structures mathématiques préétablies³⁴. Autrement dit, Bachelier isole les différents phénomènes réels en fonction de leurs caractéristiques communes dominantes de manière à les regrouper dans une même classe :

« Tous les problèmes comportant de grands nombres doivent être ramenés à une forme unique qui permet à la fois d'apercevoir les propriétés particulières qui les différencient et les caractères généraux qui les unissent » ([1913], 78).

Cependant, en s'intéressant exclusivement à la structure mathématique de la théorie des probabilités sans réellement étudier les particularités des phénomènes réels, la réflexion de Bachelier se heurte à certains problèmes.

Cette démarche le conduit à un manque de précision au niveau des concepts et des définitions économiques qu'il emploie. Par exemple, au niveau de la théorie financière, les variations des cours boursiers sont aussi bien dues aux événements –l'infinité des causes– qu'à l'ignorance des agents –l'ignorance conduisant à des erreurs d'évaluation. En outre, en écartant toute réflexion sur l'origine de la variation des cours, Bachelier attribue, selon les passages, le même effet à des causes complètement différentes : la forme plus ou moins écrasée de la courbe de variation des cours –qui suit une loi de Gauss– est parfois due à l'ignorance des individus ([1914], 249) et parfois à la longueur de l'intervalle de temps considéré ([1914], 107). Cette volonté de rapporter tous ses raisonnements à un même schéma général montre donc certaines limites : elle rend certaines définitions relativement floues³⁵. Ce projet général suggère ainsi que l'intérêt de la thèse de Bachelier est mathématique avant d'être économique.

2.2. LE MODELE DE BACHELIER

Ce projet général de Bachelier apporte une clé de lecture indispensable pour comprendre sa thèse. Cette dernière, qui mêle développements mathématiques et applications empiriques –ces dernières servant à « tester » ses résultats³⁶–, a pour principal rôle d'introduire les probabilités en temps continu grâce à l'étude de la loi de variation des cours boursiers.

³⁴ La manière dont Bachelier utilise sa classification peut être rapprochée de la démarche de Van der Pol, décrite par Israël [1996], dont le modèle est comparé à un schéma « vide » qui peut être rempli de contenus différents.

³⁵ Cette imprécision a aussi été soulignée à plusieurs reprises par Mandelbrot. Lorsque Bachelier définit son principe d'espérance mathématique ([1914], 180), Mandelbrot fait remarquer que « cette citation soulève une question de base [...] : les probabilités dont nous traitons sont-elles de nature subjective ou objective ? » ([1966], 62, note n°1). Il souligne également le manque de précision et l'ambiguïté qui en découle ([1995], 171).

³⁶ A ce titre, Bachelier peut être vu comme un pionnier des idées économétriques (Jovanovic et Le Gall [à paraître]).

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, Bachelier cherche une formule permettant d'exprimer la loi de probabilité des variations des cours que le marché admet à un instant donné. Plus précisément, il s'intéresse à deux lois de probabilité : d'une part, la loi de probabilité pour qu'un cours donné soit coté à une époque donnée, et d'autre part, la loi de probabilité pour qu'un cours donné soit atteint ou dépassé dans un intervalle de temps donné. Ces deux lois permettent d'étudier les probabilités de réussite des différentes stratégies et en particulier la probabilité qu'une opération de bourse à terme, comme par exemple une option, soit exécutée. La résolution de ces problèmes repose sur un élément central de sa thèse : la loi de variation des cours. Il propose d'établir cette loi par deux méthodes distinctes : la première repose sur une analogie avec la physique et révèle une évolution dans le type d'analogie utilisé dans la construction de la théorie financière, tandis que la seconde fait appel à un raisonnement recourant aux probabilités composées et souligne la parenté avec le modèle de Regnault.

2.2.1. Première méthode : la théorie du rayonnement de la probabilité

L'originalité de la théorie de Bachelier se situe dans une analogie établie avec l'équation de la diffusion de la chaleur de Fourier. Assimilant les variations successives des probabilités dans un intervalle de temps Δt aux variations de la chaleur entre deux corps, il crée ce qu'il appelle « la théorie du rayonnement de la probabilité », qu'il considère comme un « cas particulier de la théorie des probabilités continues » ([1914], 158).

Il s'intéresse à la trajectoire décrite par le cours d'un titre sur un réseau régulier correspondant à une marche aléatoire symétrique, comme l'est un jeu de pile ou face –on retrouve ici sa volonté énoncée dans son projet général de réduire tous les problèmes étudiés à un jeu. Etudier une telle trajectoire suppose de raisonner en temps discret ; or, Bachelier s'intéresse aux probabilités continues. Pour passer des probabilités en temps discret à des probabilités en temps continu, il opère un passage à la limite en découpant l'intervalle de temps t en une infinité d'intervalles de temps Δt , le cours de l'actif variant pendant chaque intervalle de temps Δt de la quantité fixe et très petite Δx . En définitive, ce passage revient à faire tendre le pas du processus vers zéro ce qui lui permet de découvrir certaines propriétés du mouvement brownien³⁷. Examinons cette démarche plus en détail.

³⁷ Le mouvement brownien est un processus de Poisson, c'est-à-dire une marche aléatoire symétrique, dont le pas tend vers zéro.

Pour établir l'expression de la probabilité pour que le cours x soit atteint ou dépassé à l'époque t , Bachelier suppose qu'à l'époque t n'importe quel cours $\dots X_{n-2}, X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, X_{n+2} \dots$ peut être coté, ces différents cours ne différant entre eux que de la quantité constante Δx . Il attribue alors à chaque cours une probabilité, respectivement $\dots p_{n-2}, p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \dots$, et déduit de la distribution de probabilité à l'époque t , la distribution de probabilité à l'époque $t+\Delta t$. Le cours ne variant que de la quantité Δx pendant l'intervalle de temps Δt , si le cours x_n est coté à l'époque t , alors les cours x_{n-1} ou x_{n+1} ont la même probabilité, $\frac{p_n}{2}$, d'être cotés à l'époque $t+\Delta t$. Inversement, pour que le cours x_{n-1} soit coté à l'époque $t+\Delta t$, il faut que le cours x_{n-2} ou le cours x_n ait été coté à l'époque t . Par conséquent, la probabilité du cours x_{n-1} à l'époque $t+\Delta t$ est $\frac{p_{n-2} + p_n}{2}$; celle du cours x_n est, à la même époque, $\frac{p_{n-1} + p_{n+1}}{2}$, etc. Ce changement de probabilité pendant une période de temps Δt est analogue à la diffusion de la chaleur entre deux corps :

« Chaque cours x rayonne pendant l'élément de temps vers le cours voisin une quantité de probabilité proportionnelle à la différence de leurs probabilités [...]. La loi qui précède peut, par analogie avec certaines théories physiques, être appelée la loi du rayonnement ou de diffusion de la probabilité » (Bachelier [1900], 46).

En effet, il explique que « la probabilité passe d'un point plus probable à un autre qui l'est moins comme la chaleur passe d'un corps chaud à un corps froid » ([1912], 324). En appliquant son raisonnement à l'évaluation de l'accroissement, pendant le temps Δt , de la probabilité P que le cours x se trouve à l'époque t dans l'intervalle $[x, +\infty]$, Bachelier aboutit à une équation de Fourier³⁸. Il établit ainsi une propriété importante de ce qui deviendra le mouvement brownien. Enfin, pour appliquer ce raisonnement en temps continu, il suppose que dans chaque intervalle de temps Δt le cours varie de façon continue d'une quantité très petite inférieure à ε telle que :

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varpi dx = 1,$$

où ϖ désigne la probabilité de variation des cours boursiers relative à Δt et dont la distribution suit une loi de Gauss.

³⁸ Boness ([1964], 77) rappelle que « c'est la première fois que l'on montre que le processus de Wiener satisfait l'équation de la diffusion de Fourier ».

Deux éléments peuvent être soulignés dans cette démarche : l'utilisation d'analogies, et la faible importance de la théorie économique.

La manière dont Bachelier recourt aux analogies est radicalement différente de celle de Regnault. Cette opposition peut être étudiée à travers l'évolution historique décrite par Israël [1996] entre « analogie mécanique » et « analogie mathématique »³⁹. Pour Regnault, l'utilisation d'analogies provient de sa conception classique de l'univers, c'est-à-dire d'un univers mécanique non complexe régi par quelques lois physiques. L'analogie entre les différents phénomènes est possible parce que ces derniers sont soumis au même schéma mécanique. Pour cette raison, on peut considérer que Regnault recourt à des analogies mécaniques. En revanche, Bachelier utilise son analogie avec l'équation de la diffusion de la chaleur de Fourier d'une manière radicalement différente. Il reprend cette équation mais ne conserve la structure mathématique que pour l'appliquer à un tout autre phénomène réel. Dans ce cas, la structure mathématique est le seul lien commun entre les variations des cours boursiers et la diffusion de la chaleur. Ce changement préfigure une certaine évolution dans la construction de cette discipline.

La seconde remarque concerne la place de la théorie économique dans la thèse de Bachelier. On s'aperçoit que l'économie n'a pas vraiment de rôle dans son raisonnement. En fait, il élimine tous les problèmes économiques de manière à formaliser le plus simplement possible le problème des variations des cours boursiers. Il écarte ainsi tous les problèmes liés à l'information et ne cherche pas à analyser l'origine des variations des prix –il explique simplement que leurs causes sont trop complexes ([1912], 176-7). En définitive, il abandonne toutes les préoccupations économiques pour se concentrer uniquement sur la structure mathématique du modèle. Cette démarche se retrouve dans la seconde méthode qu'il propose, laquelle permet de préciser le lien entre Bachelier et Regnault.

2.2.2. Seconde méthode : le perfectionnement mathématique du modèle de Regnault

³⁹ Israël analyse la forme récente et originale de la mathématisation à partir de l'opposition entre analogies mécaniques et analogies mathématiques. Les premières servent à « bâtir un modèle mécanique imitant le phénomène étudié », tandis que les secondes consistent à « trouver des " analogies ", dans le sens général et générique du mot, entre des phénomènes parfois très divers, dont l'un au moins se soumet à une description mathématique simple. Une fois ces analogies établies, cette description sera un *modèle mathématique* pour tous les phénomènes " semblables " » ([1996], 20). Ainsi, « le modèle mathématique est une construction partielle et *ad hoc*, un morceau de mathématique appliqué à un morceau de réalité, sans qu'on puisse exclure (au contraire) que d'autres morceaux de mathématiques puissent être collés sur le même morceau de réalité et coexister les uns à côté des autres » ([1996], 330).

A la lecture de la thèse de Bachelier, on ne peut qu'être frappé par les similitudes avec le modèle du joueur développé par Regnault. Cependant, que ce soit dans sa thèse ou dans ses autres publications, Bachelier ne cite aucune référence bibliographique –sauf dans de rares passages dans lesquels il cite des probabilistes. Il n'y a donc aucune preuve explicite de filiation. Pourtant, même si l'on possède peu d'archives sur Bachelier, certains éléments permettent de reconstituer un possible lien entre ces deux auteurs. Deux éléments peuvent expliquer cette absence de référence bibliographique économique : son parcours professionnel et son projet général.

Bachelier s'est intéressé, avant sa thèse, à des questions liées aux marchés financiers (Bachelier [1912], 293), cette période coïncidant vraisemblablement avec le moment où il a dû interrompre ses études (Bachelier [1921], 1). Le livre de Regnault n'étant probablement pas inconnu de certains opérateurs –ce que laisse suggérer l'ouvrage de Gherardt [1910]–, et les graphiques de Lefèvre étant connus de tous les agents de change (Lefèvre [1874], 1), Bachelier aurait pu en prendre connaissance dans une perspective uniquement opérationnelle. Parallèlement, son projet général souligne l'absence d'intérêt pour la composante économique de la théorie financière –son étude concernant les probabilités. Par conséquent, pour ces deux raisons, les travaux théoriques de Lefèvre et de Regnault sortant de son cadre d'analyse il n'avait pas de raison de s'intéresser à leur généalogie et il a pu les considérer connus de tous⁴⁰.

Dire que Bachelier reprend le modèle de Regnault est évidemment une hypothèse que l'on ne peut vérifier. Mais beaucoup d'éléments parlent en sa faveur : ils ont le même but ; tous les résultats et les hypothèses de Regnault se retrouvent chez Bachelier ; ce dernier introduit ses concepts dans le même ordre que Regnault ; certains paragraphes de Bachelier –en particulier les problèmes des frais de courtage qu'il évoque dans *Le jeu, la chance et le hasard*– sont directement liés aux préoccupations de Regnault tout en étant très éloignés de ses propres centres d'intérêt. Si cette hypothèse est exacte, Bachelier reprend dans sa thèse le modèle du joueur. Doit-on en conclure qu'il n'a rien apporté à la théorie financière ? Pas du tout. Bien qu'il reprenne le modèle de Regnault, son apport est considérable : il le traduit en langage mathématique tout en l'améliorant considérablement. Il s'agit d'une étape importante dans la construction de la théorie financière : Bachelier donne la première formulation mathématique explicite du modèle de marche aléatoire servant à représenter les fluctuations des cours boursiers. Cependant,

⁴⁰ En revanche, Massebeuf, qui a suivi des études de droit, cite dans sa thèse de 1923 les travaux de Regnault et de Lefèvre.

contrairement à Regnault qui, en tant qu'économiste, cherchait à condamner « scientifiquement » le jeu, Bachelier, en tant que mathématicien, ne s'intéresse plus qu'au calcul des probabilités et à la structure mathématique du modèle. Par conséquent, son apport doit être recherché dans cette direction.

Le modèle du joueur sert de point de départ à Bachelier. Comme Regnault, il distingue deux sortes de mouvements qui correspondent à deux types de probabilités :

« 1° La probabilité que l'on pourrait appeler *mathématique*, c'est celle que l'on peut déterminer *a priori*; celle que l'on étudie dans les jeux de hasard.

2° La probabilité dépendant de faits à venir et, par conséquent, impossible à prévoir d'une façon mathématique.

C'est cette dernière probabilité que cherche à prévoir le spéculateur » ([1900], 31).

La probabilité mathématique correspond aux variations naturelles des cours boursiers tandis que la probabilité dépendant de faits à venir s'occupe des variations liées au hasard⁴¹. En d'autres termes, il retient deux types de mouvements : au premier il associe les variations régulières décrites par ce qu'il appelle les « cours équivalents »⁴², au second il associe la loi de variation des cours qu'il recherche⁴³. Comme Regnault, il considère que les variations du cours sont indépendantes des variations antérieures⁴⁴ et que le spéculateur a une espérance mathématique nulle. Ces hypothèses lui permettent alors d'établir la loi de probabilité des variations des cours.

Il explique logiquement et sans aucune formalisation la forme en cloche de la courbe de probabilité, pourquoi elle admet un maximum. Connaissant la forme de cette courbe, il traduit son raisonnement en langage mathématique et montre que cette loi suit bien une loi de Gauss. Il explique tout d'abord que la probabilité d'atteindre le cours z à l'instant $t_1 + t_2$ – notée p_{z,t_1+t_2} – sachant que le cours x est atteint en t_1 s'obtient par le calcul des probabilités composées⁴⁵ :

⁴¹ Dans son introduction, Bachelier distingue deux sortes de mouvements, résultant d'une part des « causes en quelque sorte naturelles des variations » et d'autre part, « des causes factices ». Les premières sont dites naturelles parce qu'elle peuvent être déterminées mathématiquement *a priori*. Les secondes, que j'assimile à ce qu'il nomme les « causes fictives », correspondent aux « faits que nous attribuons au hasard » ([1914], 12).

⁴² La définition des cours équivalents permet d'isoler les variations des cours dues aux coupons et aux reports et correspondent à la droite retraçant l'évolution logique des cours compris entre deux liquidations. Cette notion existait déjà chez Regnault ([1863], 121-2).

⁴³ Comme Regnault, Bachelier précise que si son raisonnement portait sur des actions et non sur des obligations, il faudrait considérer uniquement la probabilité dépendant des faits à venir ([1900], 33, note n°1).

⁴⁴ L'indépendance des variations lui permet d'utiliser les probabilités composées. Pour Bachelier il s'agit d'une simplification dont il ne donne aucune justification économique ([1912], 279).

⁴⁵ Boness ([1964], 77) explique que « c'est une des premières expressions, si ce n'est la première, que l'on connaît aujourd'hui sous le nom d'équation de Chapman-Kolmogorov-Smoluchowski ».

$$p_{z,t_1+t_2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,t_1} p_{z-x,t_2} dx dz .$$

Sachant que la forme de la courbe est celle d'une cloche, Bachelier pose ensuite l'équation générale d'une telle probabilité – $p = Ae^{-B^2x^2}$ – et détermine la probabilité qu'il cherche :

$$p = \frac{1}{2\pi k\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\pi k^2 t}} .$$

Cette probabilité est bien la densité d'une loi de Laplace-Gauss et par conséquent, les variations de prix entre deux périodes consécutives suivent une loi normale. Cette loi lui permet ensuite d'étudier les variations des cours pendant un intervalle de temps donné et de déterminer la probabilité qu'un cours donné soit atteint ou dépassé à une période donnée. En d'autres termes, il détermine la probabilité que le cours s'écarte d'un certain intervalle de son cours d'origine, et retrouve alors la loi des écarts précédemment établie par Regnault. Mais contrairement à ce dernier, Bachelier offre une démonstration mathématique de la loi des écarts pour les cours boursiers.

La mise en évidence de ce lien entre les modèles de Regnault et de Bachelier ne signifie pas que leurs analyses soient totalement semblables. Ces deux auteurs rendent compte de deux moments importants de la construction de la théorie des fluctuations des cours boursiers. Lorsque Bachelier reprend le modèle de Regnault, ce dernier a déjà établi les frontières de ce nouveau champ disciplinaire. Regnault accorde une grande importance aux problèmes économiques. En revanche, si on considère que Regnault a posé certaines bases économiques de la théorie financière, ce type de préoccupation est absent de l'analyse de Bachelier qui se concentre sur la formalisation du problème de la variation des cours boursiers. Il s'inscrit dans une logique de raffinement scientifique –il reprend la structure mathématique du modèle pour la perfectionner–, ce qui explique l'existence d'un certain flou au niveau des concepts et des hypothèses économiques du modèle. L'apport de Bachelier se situe au niveau de la structure mathématique du modèle qu'il améliore considérablement. Il raisonne à partir de probabilités en temps continu, découvre ainsi avant les physiciens certaines propriétés du mouvement brownien et donne naissance à la théorie mathématique des processus stochastiques en temps continu. Il propose également une formulation mathématique de la loi de probabilité des variations des cours boursiers dont il donne une démonstration mathématique –Regnault n'en a donné qu'une

description littéraire– et élabore pour la première fois une théorie mathématique en temps continu de l'évaluation du prix des options, redécouverte par Black, Scholes et Merton en 1973.

CONCLUSION

L'étude de son projet général et l'établissement d'une généalogie de son modèle montrent que Bachelier reprend le modèle que Regnault avait proposé en 1863 et perfectionne considérablement sa structure mathématique. Il permet ainsi à la théorie financière de franchir une étape significative.

Ces deux auteurs rendent compte de deux moments importants de la construction de la théorie financière et éclairent la manière dont cette discipline s'est bâtie. Au cours du XIX^{ème} siècle, des économistes s'efforcent de démontrer la nécessité économique des marchés à terme ainsi que leur équité pour les intervenants, en s'opposant aux condamnations morales et juridiques qui prévalent alors. Ils préparent ainsi le terrain au développement de la théorie financière car la légalisation des marchés à terme de 1885 à laquelle ce courant a conduit ouvre la voie à des études juridiques, financières et économiques constructives. Bachelier apparaît alors comme porté par ce mouvement qui s'amorce à la fin du siècle dernier. Cependant, ses travaux retiennent peu l'attention des économistes du début du siècle et c'est seulement à partir des années 1950 qu'ils intéressent sérieusement des économistes américains, débouchant en 1973 sur le modèle d'évaluation du prix des options de Black, Scholes et Merton. Il aura fallu l'effondrement du système de Breton Woods et le flottement des changes pour que les marchés à terme deviennent indispensables et fassent ainsi l'objet d'une véritable attention théorique.

BIBLIOGRAPHIE

Bachelier L. [1900] *Théorie de la spéculation*, reproduite dans *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 3^{ème} série, tome 17, janvier, pp. 21-86. Réédition de 1995 par J. Gabay, Paris. Traduction anglaise dans Cootner P.A. [1964] *The Random Character of Stock Market Prices*, Cambridge : The MIT Press.

Bachelier L. [1901] « Théorie mathématique du jeu », *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 3^{ème} série, tome 18, janvier, pp. 77-119. Réédition de 1995 par J. Gabay, Paris.

Bachelier L. [1912] *Calcul des probabilités*, Paris : Gauthier-Villars. Réédition de 1992 par J. Gabay, Paris.

Bachelier L. [1913] « Les probabilités cinématiques et dynamiques », *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 3^{ème} série, tome 30, février.

Franck Jovanovic, « L'origine de la théorie financière : une réévaluation de l'apport de Louis Bachelier », *Revue d'économie politique*, 110 (3) mai-juin 2000, pp. 395-418.

Bachelier L. [1914] *Le jeu, la chance et le hasard*, Paris : Flammarion. Réédition de 1993 par J. Gabay, Paris.

Bachelier L. [1921] « Notice sur les travaux de M. Louis Bachelier », *La solidarité*, Besançon, mai.

Breton Y. [1991] « Les économistes français et les questions de méthode » in *L'économie politique en France au XIX^e siècle*, sous la direction de Y. Breton et M. Lutfalla, Paris : Economica.

Charreaux G. [1997] « Théorie financière » in *Encyclopédie des marchés financiers*, Paris : Economica, pp. 1897-1910.

Coumet E. [1970] « La théorie du hasard est-elle née par hasard ? », *Annales ESC*, vol. 25, n°3, mai-juin, pp. 574-598.

Desrosières A. [1993] *La politique des grands nombres*, Paris : La découverte.

Dimand R.W. [1993] « The case of Brownian motion: a note on Bachelier's contribution », *British Journal for the History of Science*, vol. 26, n°2, pp. 233-234.

Dormoy E. [1872-1873] « Théorie mathématique des jeux de hasard », *Journal des Actuaire Français*, tome 1, n°2, avril, pp. 120-146 et pp. 232-257 et tome 2, n°5, janvier, pp. 38-57.

Gherardt M. [1910] *Le gain mathématique à la Bourse*, Paris : Charles Amat.

Feldman J., Lagneau G. et Matalon B. [1991] *Moyenne, milieu, centre. Histoires et usages*, Paris : éditions EHESS.

Frèrejouan du Saint G. [1893] *Jeu et pari au point de vue civil, pénal et réglementaire. Loteries et valeurs à lots, jeux de Bourse – marchés à terme*, Paris : L. Larose.

Israël G. [1996] *La mathématisation du réel*, Paris : Seuil.

Jovanovic F. [2002] « Instruments et théorie économiques dans la construction de la « science de la Bourse » d'Henri Lefèvre », *Revue d'Histoire des Sciences Humaines*, à paraître.

Jovanovic F. et Le Gall Ph. [2001] « Does God practice random walk ? The « financial physics » of a 19th century forerunner, Jules Regnault », *European Journal of the History of Economic Thought*, 8 (3), pp. 332-362.

Jovanovic F. et Le Gall Ph. [à paraître] « La contribution de la modélisation financière à l'essor de l'économétrie : l'exemple de Louis Bachelier », in *L'économétrie en France. Origines, développements et mutations (1838-1939)*, Y. Breton et Ph. Le Gall éd.

Keynes J.M. [1912] review of Louis Bachelier's *Calcul des probabilités*, *Journal of the Royal Statistical Society*, décembre. Réédité en 1983 dans les *Collected Writings*, Londres : Macmillan et Cambridge University Press, volume XI.

Keynes J.M. [1921] *A Treatise on Probability*, Londres : Macmillan.

Kolmogorov A. [1931] « Über die analytischen methoden in der wahrscheinlich-keitsrechnung », *Mathematische Annalen*, pp. 415-458.

- Franck Jovanovic, « L'origine de la théorie financière : une réévaluation de l'apport de Louis Bachelier », *Revue d'économie politique*, 110 (3) mai-juin 2000, pp. 395-418.
- Laurent H. [1873] *Traité du calcul des probabilités*, Paris : Gauthier-Villars.
- Laurent H. [1893] *Théorie des jeux de hasard*, Paris : Gauthier-Villars.
- Lefèvre H. [1870] *Traité théorique et pratique des valeurs mobilières et des opérations de Bourse*, Paris : Lachaud.
- Lefèvre H. [1874] *Principes de la science de la Bourse*, Paris : Publication de l'Institut Polytechnique.
- Leroy S.F. [1989] « Efficient Capital Markets and Martingales », *Journal of Economic Literature*, vol. XXVII, décembre, pp. 1583-1621.
- Maiocchi R. [1990] « The case of Brownian motion », *British Journal for the History of Science*, vol. 23, pp. 257-283.
- Mandelbrot B. [1966] « Nouveaux modèles de la variation des prix », *Cahiers du séminaire d'économétrie*, n°9, pp. 55-66.
- Mandelbrot B. [1995] *Les objets fractals*, Paris : Champs Flammarion.
- Massebeuf A. [1923] *Des marchés à primes dans les bourses de valeurs (Paris - Londres - Berlin)*, Paris : Garnier frères éd.
- Ménard C. [1978] *A.A. Cournot. La formation d'une rationalité économique*, Paris : Flammarion.
- Ménard C. [1987] « Trois formes de résistance aux statistiques : Say, Cournot, Walras » in *Pour une histoire de la statistique*, tome 1, Paris : Economica.
- Merton R.C. [1998] « Applications of Option-Pricing Theory : Twenty-Five Years Later », *American Economic Review*, vol. 88, n°3, juin, pp. 323-349.
- Regnault J. [1863] *Calcul des chances et philosophie de la Bourse*, Paris : Mallet-Bachelier et Castel.
- Samuelson P.A. [1965] « Rational Theory of Warrant Pricing », *Industrial Management Review*, vol. 6, pp. 13-32.
- Scholes M.S. [1998] « Derivatives in a Dynamic Environment », *American Economic Review*, vol. 88, n°3, juin, pp. 350-370.
- Walras L. [1880] « La Bourse, la spéculation et l'agiotage », *Bibliothèque universelle*, mars et avril. Réédition de 1992 par Economica, Paris, tome X.
- Walter C. [1996] « Une histoire du concept d'efficience sur les marchés financiers », *Annales HSS*, n°4, juillet-août, pp. 873-905.
- Zylberberg A. [1990] *L'économie mathématique en France 1870-1914*, Paris : Economica.