
**LE MODELE DE MARCHE ALEATOIRE
DANS L'ECONOMIE FINANCIERE DE 1863 A 1976**

Franck JOVANOVIC[‡]

L'objectif de cet article est de montrer comment l'utilisation du modèle de marche aléatoire pour représenter les variations boursières a été progressivement incorporée dans la théorie économique, faisant de ce modèle la représentation de l'évolution dynamique des prix d'équilibre d'un marché financier de libre concurrence. Depuis les travaux de Fama, le lien entre efficacité informationnelle et caractère aléatoire des variations boursières est accepté comme une évidence. Cet article défend la thèse selon laquelle l'explication théorique du caractère aléatoire des variations boursières proposée par la théorie de l'efficacité informationnelle n'est pas robuste, car elle a été plaquée sur un modèle sans être démontrée. Nous exposons ici les principales étapes de cette histoire qui commence en 1863 lorsque Regnault découvre que les variations boursières peuvent être représentées par un modèle de marche aléatoire, et qui s'achève en 1976 lorsque Fama, en créant la théorie de l'efficacité informationnelle, l'introduit dans le champ de l'économie.

The aim of this article is to show how the use of the random walk model to represent stock price fluctuations has been gradually included in economic theory. Since Fama's works, the link between the efficiency theory and the random character of stock price variations is considered as obvious. This article defends that the theoretical explanation given by this theory is not strong, because it has not been demonstrated. I will expose the main steps of this history to show how the foundations given to this model has changed until it has been representing the dynamic of the prices on a competing market, which is always in equilibrium. This history starts in 1863 when Regnault discovered that stock price fluctuations can be represented by a random walk model. This history finishes in 1976 when Fama, creating the efficient market theory, included this model in the economic field.

Classification JEL : B.0, G.14.

Mots-clés : théorie financière, histoire de la pensée, marche aléatoire.

Keywords: financial theory, history of economic thought, random walk.

[‡] TELUQ – UQAM (Université du Québec À Montréal) – 100, Sherbrooke Ouest, Montréal, Québec, H2X 3P2, Canada. Courriel: Jovanovic.franck@teluq.uqam.ca.

Le modèle de marche aléatoire est utilisé en économie financière¹ pour représenter les variations boursières. Une marche aléatoire, $X = \{X_t, t \in T\}$, est un processus stochastique à accroissements indépendants et stationnaires en temps discret tel que $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{t=1}^n X_t$, où les X_t sont indépendants et équidistribués. On a entre autres $E(S_n) = 0$ et $Var(S_n) = n$. Il s'agit donc d'une suite de variables aléatoires indexées par t , qui, pour les cours boursiers, représente le temps. Selon ce processus, l'évolution du prix d'un actif, P_t est de la forme $P_{t+1} = P_t + \varepsilon_{t+1}$, où $\varepsilon = \{\varepsilon_t, t \in \mathbb{N}\}$ est un bruit blanc. On connaît plus généralement la version en temps continu de la marche aléatoire, le mouvement brownien –ou processus de Wiener– qui est un processus à trajectoires continues, à accroissements indépendants et stationnaires, tel que $S_t = S_0 + \sigma W_t$, où W_t est un mouvement brownien standard, avec $W_0 = 0$, $E(W_1) = 0$ et $E(W_1^2) = 1$. Ce modèle occupe une place essentielle dans l'histoire de l'économie financière pour deux raisons. Premièrement, et nous le préciserons, il a donné naissance aux premiers travaux théoriques de cette discipline, travaux qui émergent à partir de 1863. Deuxièmement, il constitue une des clefs de voûte des travaux théoriques actuels, car il est constitutif de la théorie de l'efficience informationnelle élaborée entre 1965 et 1976 par Eugène Fama. Cette théorie est supposée donner au modèle de marche aléatoire le contenu théorique qu'on lui connaît généralement aujourd'hui. Elle attribue à ce modèle la représentation de l'évolution dynamique des prix d'équilibre d'un marché de libre concurrence. Cette théorie est importante pour l'économiste, car elle est considérée par certains auteurs comme le pendant de l'équilibre économique de libre concurrence pour les marchés financiers. A ce titre, le modèle de marche aléatoire, qui est à l'origine de la théorie de l'efficience informationnelle, a joué un rôle de premier plan dans la création de l'économie financière en tant que discipline scientifique.

Depuis les travaux de Fama (1965a, 1970), le lien entre efficience informationnelle et caractère aléatoire des variations boursières est accepté comme une évidence. Cet article défend la thèse selon laquelle l'explication théorique du caractère aléatoire des variations boursières proposée par la théorie de l'efficience informationnelle n'est pas robuste, car elle a été plaquée sur un modèle mathématique sans que le lien entre ce modèle et cette théorie soit clairement démontré. Cet article propose donc de revenir sur la manière dont ce lien aurait été établi. Il examine comment l'utilisation

¹ Afin de comprendre la nature des différents travaux, cet article distingue l'économie financière, l'économétrie financière et les mathématiques financières.

² De manière plus générale, on peut ajouter à ce processus une dérive, D , telle que le processus d'évolution des prix soit de la forme $P_{t+1} = P_t + D + \varepsilon_{t+1}$. Le mouvement brownien avec dérive serait alors : $S_t = S_0 + D + \sigma W_t$.

du modèle de marche aléatoire pour représenter les variations boursières a été progressivement incorporée dans la science économique, faisant de ce modèle la représentation de l'évolution dynamique des prix d'équilibre d'un marché de libre concurrence. La construction de l'économie financière en tant que discipline scientifique a été un processus long qui s'est déroulé en plusieurs étapes mises en évidence par Jovanovic (2002). Elle conduit ici à dissocier le lien entre histoire du modèle de marche aléatoire et histoire de l'efficacité informationnelle, un lien qui a été établi lors de la construction du canon de l'économie financière dans les années 1960³. Elle rompt ainsi avec la présentation traditionnelle, héritée des débats théoriques des années 1960 et 1970 et qui se retrouve dans quasiment tous les travaux qui ont présenté et enrichi l'histoire canonique de cette discipline. En dissociant cette théorie de son support mathématique, on est conduit à une réflexion théorique quant à la pertinence du lien entre théorie de l'efficacité et modèle de marche aléatoire.

Cet article revient sur les principales étapes de cette histoire qui débute en 1863 lorsque Jules Regnault introduisit ce modèle pour représenter les variations boursières. Il fut ensuite formalisé en 1900 par Louis Bachelier. Les travaux de ces deux auteurs n'ont pas directement ouvert la voie à une dynamique recherche. Il fallut attendre les années 1930, aux Etats-Unis, pour que le modèle de marche aléatoire puisse bénéficier d'une telle dynamique grâce, en partie, à l'émergence de l'économétrie. Puis, à partir des années 1960, l'institutionnalisation et l'organisation de l'économie financière aux Etats-Unis permirent d'amorcer un rapprochement progressif du modèle de marche aléatoire avec la théorie économique qui a conduit à l'élaboration, pendant cette décennie, de la théorie de l'efficacité informationnelle. Celle-ci a donné au modèle de marche aléatoire son contenu théorique actuel, sans pour autant fournir une démonstration robuste.

1. 1863, L'INTRODUCTION DU MODELE DE MARCHE ALEATOIRE DANS L'ECONOMIE FINANCIERE PAR JULES REGNAULT

L'utilisation du modèle de marche aléatoire pour représenter les variations boursières a été proposée pour la première fois en 1863 par un employé d'agent de change, Jules Regnault⁴. Le seul ouvrage qu'il ait publié, *Calcul des chances et philosophie de la bourse*, constitue le premier travail théorique connu d'économie financière. Son objectif consiste à déterminer les lois de la nature qui régissent les

³ Un canon est un ensemble de textes théoriques dont l'interprétation et la ré-interprétation forme le bagage des théoriciens. La construction de l'histoire canonique de l'économie financière est analysée par Jovanovic (2008).

fluctuations boursières et que le calcul statistique permet d'approcher. Cet objectif est par ailleurs conforme à l'utilisation jointe de la statistique et de raisonnements mathématiques que l'on trouve chez les « natural econometricians » (Le Gall 2007). Pour ce faire, Regnault dissocie les variations de long terme des variations de court terme auxquelles le modèle marche aléatoire est associé.

1.1. LE CONTEXTE COMME RAISON A L'UTILISATION DU MODELE DE MARCHE ALEATOIRE

Après avoir été critiqué et boudé, le marché boursier parisien attira, à partir du milieu du 19^{ème} siècle, les investisseurs et les entreprises privées⁵. Son développement s'adossa à la forte croissance économique du Second Empire. A cette époque, l'évolution et l'appréciation du rôle économique de la bourse furent accompagnées de débats sur l'utilité des marchés financiers⁶, débats qui devaient permettre de décider de laisser les marchés financiers se développer ou non. C'est en partie pour répondre à ces débats que Regnault publia son ouvrage. Cet auteur utilisa le modèle de marche aléatoire pour démontrer que la bourse est juste et équitable au regard des critères de l'époque, et par conséquent que son développement était acceptable. Selon l'auteur, l'équité de la Bourse provient de l'égalité des intervenants face aux lois de la nature qui régissent les variations boursières, autrement dit, tous les intervenants se trouvent dans des conditions identiques. La justice est, quant à elle, relative à l'espérance de gain des différents intervenants. Les joueurs⁷ qui spéculent sur les écarts, et dont les opérations financières ne participent pas au développement économique, sont inévitablement ruinés parce qu'ils enfreignent les règles morales dictées par les lois de la nature. En revanche, les spéculateurs, en se conformant aux lois de la nature, contribuent à l'harmonie sociale et perçoivent les coupons détachés des titres obligataires qui représentent le seul gain possible⁸. En s'inspirant de l'homme moyen de Quételet (Jovanovic 2001), Regnault détermine la vraie valeur du titre, sur laquelle les spéculateurs se basent pour investir. Cette vraie valeur du titre est, selon Regnault, parfaitement déterminable grâce au calcul de la valeur moyenne de long terme du titre. Il

⁴ Une biographie de Jules Regnault (1834-1894) est présentée dans Jovanovic (2004, 2006b). Son travail est analysé dans Jovanovic (2000, 2002, 2006b) ainsi que dans Jovanovic et Le Gall (2001).

⁵ Sur le marché financier français au 19^{ème} siècle, on consultera Gallais-Hamonno *et alii* (2007) et Hautcoeur *et alii* (2007).

⁶ Sur ce contexte, voir Preda (2001, 2004) et Jovanovic (2002, 2006a).

⁷ Regnault distingue les spéculateurs des joueurs. Selon la terminologie actuelle, les joueurs seraient appelés des spéculateurs, et les spéculateurs des investisseurs.

⁸ Rappelons que pour beaucoup d'auteurs, harmonie sociale et respect des lois de la nature sont indissociables à cette époque.

oppose à cette détermination de long terme, une marche aléatoire de court terme due, entre autres, à la myopie des joueurs.

Chaque intervenant, même s'il ne l'exprime pas par des chiffres, agit en fonction du « degré de probabilité qu'il attribue aux événements » (Regnault 1863, 20). Bien que l'information publique soit commune à tous les agents, l'évaluation des effets de chaque événement sur les cours, et par conséquent l'estimation de la valeur d'un titre qui en résulte, reste propre à chaque intervenant (Regnault 1863, 20). Cette diversité d'opinions permet les échanges, car « si tout le monde avait les mêmes idées et appréciait également les mêmes causes, il n'y aurait plus de contreparties possibles [...] et les variations seraient nulles par conséquent » (Regnault 1863, 22). Regnault considère alors que les évaluations subjectives des joueurs sont soumises à l'erreur, mais suivent pourtant une loi précise : la loi des erreurs –*i.e.* la loi normale⁹. De ce fait, les évaluations des joueurs se répartissent selon une distribution normale. En l'absence de nouvelles informations¹⁰, les cours vont alors graviter autour de la valeur du titre –qui correspond chez Regnault à la moyenne de long terme¹¹. Il existe ainsi deux groupes d'opérateurs également répartis autour de la valeur du titre –la moyenne–, les « haussiers » et les « baissiers ». Regnault analyse alors la spéculation de court terme comme un type de « jeu de pile ou face » (1863, 34).

De manière particulièrement novatrice, cet auteur assimile le comportement des cours boursiers à une marche aléatoire bien que cette expression ne soit jamais employée¹². Du fait de la distribution normale des évaluations des joueurs, le cours aura la même probabilité de se situer au-dessus qu'au-dessous de la valeur moyenne puisque la probabilité, 1/2, qu'une transaction soit effectuée par ceux qui sous-évaluent la valeur est la même que la probabilité qu'une transaction soit effectuée par ceux qui la surévaluent. Si cette probabilité était différente, Regnault précise que les joueurs pourraient faire un arbitrage¹³ en choisissant de suivre systématiquement le mouvement qui aurait la plus forte probabilité (Regnault 1863, 41). De même, comme dans un jeu de pile ou face, la hausse ou la baisse des cours boursiers sont indépendantes. Par conséquent, ni l'une ni l'autre ne permettent pas

⁹ Regnault ne nomme jamais explicitement la loi normale ; ce terme n'apparut qu'en 1877 avec Wilhelm Lexis (Armatte 1991).

¹⁰ Parallèlement, Regnault suppose que de nouvelles informations arrivent de manière imprévisible (les causes accidentelles), mais, pour sa démonstration, il raisonne « toutes choses égales par ailleurs », et ne considère que le cas où aucune nouvelle information n'intervient.

¹¹ Pour Regnault, comme pour Quételet, la moyenne est synonyme de perfection et de moralité. Pour les considérations sur la moyenne, voir Porter (1986).

¹² Le terme aléatoire –*random*– est apparu dans son sens statistique en 1898 (Frankfurter, *et al.* 1999, 166-7), tandis que le terme de marche aléatoire –*random walk*– fut utilisé pour la première fois en 1905 par Karl Pearson (Pearson 1905a, 1905b).

¹³ Ce terme est explicitement utilisé par Regnault (1863, 40).

d'anticiper le sens des variations futures (Regnault 1863, 38). Selon ces hypothèses, puisque, à chaque instant, au moment même de l'opération, les probabilités de perte ou de bénéfice sont toujours égales à 1/2. Regnault explique ensuite que l'espérance de gain du joueur est nulle. Enfin, ajoute-t-il, le cours actuel reflète toutes les informations publiques disponibles à partir desquelles les intervenants établissent leur évaluation de la valeur du titre (Regnault 1863, 29-30).

On peut dès à présent noter que Regnault fait référence à un modèle de marche aléatoire particulier. En effet, si l'on donne une interprétation mathématique du modèle que Regnault suggère, les prix des obligations varieraient selon un modèle de marche aléatoire avec retour à la moyenne *-i.e.* centré sur la moyenne : $P_{t+1} = \bar{P} + \varepsilon_{t+1}$, où $\varepsilon = \{\varepsilon_t, t \in \mathbb{N}\}$ est un bruit blanc et \bar{P} la valeur moyenne de l'obligation¹⁴. De ce fait, l'espérance de gain entre deux périodes est bien nulle, $E(P_{t+1} - P_t) = 0$.

1.2. LA VALIDATION EMPIRIQUE DE CE MODELE

Son modèle établi, Regnault teste son hypothèse que les variations boursières de court terme sont conformes à un modèle de marche aléatoire. Nous savons que si les cours boursiers suivent une marche aléatoire, du fait de l'indépendance du processus, les écarts augmentent proportionnellement à la racine carrée du temps. C'est précisément ce que Regnault vérifie pour la rente française 3% qui était le principal titre obligataire émis par l'Etat et aussi le principal titre coté à la Bourse de Paris. Il détermine l'écart moyen pour différentes périodes (un mois, un trimestre, une année) à partir des données mensuelles, portant sur les cours les plus bas et les prix les plus hauts atteints de mai 1825 à octobre 1862. Cet écart moyen est bien proportionnel à la racine carrée du temps écoulé, son test est concluant (Regnault 1863, 171-8). La validation de son hypothèse le conduit à énoncer une propriété du modèle de marche aléatoire pur :

« Il existe donc une loi mathématique qui règle les variations et l'écart moyen des cours de la Bourse, et cette loi, qui ne paraît pas avoir jamais été soupçonnée jusqu'à présent, nous la formulons ici pour la première fois :

L'ECART DES COURS EST EN RAISON DIRECTE DE LA RACINE CARREE DES TEMPS »

(Regnault 1863, 50, les majuscules sont de l'auteur).

¹⁴ Ce modèle est similaire au processus en temps continu d'Ornstein-Uhlenbeck dont la dynamique est $dP_t = a(\bar{P} - P_t)dt + dW_t$, où \bar{P} est la moyenne, W_t un brownien et a une constante. En posant $a = 1$, on obtient $dP_t = (\bar{P} - P_t)dt + dW_t$, ce qui s'écrit en temps discret $P_{t+1} - P_t = \bar{P} - P_t + \varepsilon_{t+1}$, avec $\varepsilon_{t+1} = W_{t+1} - W_t$. On obtient ainsi le modèle de marche aléatoire avec retour à la moyenne, $P_{t+1} = \bar{P} + \varepsilon_{t+1}$.

L'établissement empirique de cette loi de la racine carrée du temps constitue un premier résultat qui supporte le caractère aléatoire des variations boursières¹⁵. Regnault l'applique ensuite à son modèle sur les variations de court terme.

Il est important de noter que Regnault tire cette loi de ses observations empiriques. Ses tests du modèle de court terme consistent à se poser la question suivante : j'achète aujourd'hui un titre dans l'intention de le revendre dans n jours – n étant inférieur à 30 jours, car le modèle de court terme reste dans le cadre d'une liquidation mensuelle. Dans ce cas, l'espérance de gain est nulle et l'écart moyen suit la loi de la racine carrée du temps. Cette loi de la racine carrée des temps ne peut cependant être obtenue à partir des hypothèses que donne Regnault, selon lesquelles les cours boursiers suivent une marche aléatoire avec retour à la moyenne, $P_{t+1} = \bar{P} + \varepsilon_{t+1}$. En effet, dans ce modèle, il n'y a pas indépendance des cours successifs P_t et P_{t+1} à cause de la valeur moyenne autour de laquelle les cours fluctuent. Si les cours boursiers étaient modélisés par un jeu de pile ou face sans biais, on aurait un processus de Bernoulli énoncé en introduction, selon lequel $P_{t+1} = P_t + \varepsilon_{t+1}$. Dans ce cas, on pourrait tirer la loi de la racine carrée du temps. Deux modèles cohabitent donc dans l'analyse de Regnault. Malgré cette incohérence, cet auteur est le premier à suggérer de représenter les variations boursières par un modèle de marche aléatoire, il est également le premier à établir que les écarts des prix sont proportionnels à la racine carrée du temps.

Le travail de Regnault semble n'avoir été diffusé qu'auprès des actuaires français, il bénéficiait également d'une entrée dans la prestigieuse encyclopédie de Pierre Larousse, le *Grand dictionnaire universel du XIXème siècle*¹⁶. Il fallut cependant attendre 1900, la thèse de Louis Bachelier, pour que l'hypothèse de marche aléatoire de Regnault soit approfondie. La représentation des variations boursières par un tel modèle est en effet au cœur de la thèse de Bachelier, même si elle n'en est cependant pas son objet d'étude¹⁷.

¹⁵ Quételet, dont le travail a influencé la pensée de Regnault, avait lui-même établi cette loi dans ses travaux (Quételet 1848, 43 et 48).

¹⁶ Il est cependant à noter qu'il existe une erreur dans ce dictionnaire qui attribue cet ouvrage à Jean-Joseph Nicolas Regnault qui signait certains de ses ouvrages « J. Regnault » (ce qui est certainement à l'origine de cette confusion). Ce conducteur des Ponts et Chaussées, né à Villers-la-Montagne (Moselle) le 4 juin 1797, est décédé le 17 juillet 1863 à Paris. Cette erreur fut reprise dans le *Catalogue général de la librairie française* rédigé par Lorenz – tome des années 1840-1865 – qui recensait les ouvrages publiés.

¹⁷ Sur les travaux de Bachelier, voir l'ouvrage édité en 2002 par Courtault et Kabanov. Sur le lien entre le travail de Bachelier et celui de Regnault, et sur le projet général de Bachelier, voir Jovanovic (2000).

2. 1900, LA FORMULATION MATHÉMATIQUE OPÉRÉE PAR LOUIS BACHELIER

Mathématicien, Bachelier ne s'intéressa pas à la théorie financière pour elle-même mais parce qu'elle constituait un bon exemple pour introduire et étudier les probabilités en temps continu. Son projet général consiste en la construction d'une théorie générale et unifiée du calcul des probabilités sur la base exclusive du temps continu¹⁸. Les données boursières collectées par les agents de change lui offraient un support empirique appréciable pour son entreprise.

2.1. LA MARCHE ALEATOIRE CHEZ BACHELIER

La thèse de Bachelier avait pour objectif l'introduction des probabilités en temps continu. Elle démontra l'équivalence entre les résultats obtenus en temps discret et ceux en temps continu en menant de front deux démonstrations : l'une avec des probabilités en temps continu, l'autre avec des probabilités en temps discret complétées par un passage à la limite grâce à la formule de Stirling. Bachelier appliqua ce principe d'une double démonstration à la loi de variation des cours boursiers. Il formula ainsi pour la première fois l'équation dite de Chapman-Kolmogorov-Smoluchowski¹⁹ :

$$p_{z,t_1+t_2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,t_1} p_{z-x,t_2} dx dz, \quad (1)$$

où p_{z,t_1+t_2} désigne la probabilité que le cours z soit coté au temps $t_1 + t_2$, sachant que le cours x a été coté au temps t_1 . Bachelier établit ensuite la probabilité de transition de σW_t —où W_t est un mouvement brownien—²⁰ :

$$p = \frac{1}{2\pi k \sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\pi k^2 t}}, \quad (2)$$

¹⁸ Rappelons que l'élaboration de la théorie des probabilités en temps continu n'a commencé qu'en 1931. Seuls Bachelier, Einstein, en 1905, et Wiener, en 1923, ont proposé des résultats en temps continu avant cette période (Von Plato 1994).

¹⁹ Nous conservons ici, comme dans le reste de l'article, la notation des auteurs. L'équation 1 s'écrirait aujourd'hui de la manière suivante : $p(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,t_1)p(z-x,t_2)dx$, avec $t = t_1 + t_2$. Précisons que la solution de cette équation n'est pas unique, mais Bachelier ne se prononce pas sur cette unicité qui n'est pas le sujet de son analyse.

²⁰ L'équation 2 s'écrirait aujourd'hui de la manière suivante : $p(x,t) = \frac{1}{2\pi k \sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\pi k^2 t}}$. Notons que l'équation 2 n'est pas à proprement parler la loi de probabilité d'un mouvement brownien, mais celle d'un brownien multiplié par l'écart type, σ , qui est égal ici à $\sqrt{2\pi k}$.

où t représente le temps, x un cours du titre et k une constante. La formulation de Bachelier de l'écart type sous la forme $\sqrt{2\pi k}$, lui permet de faire apparaître son « *coefficient d'instabilité* ou de nervosité de la valeur, c'est lui qui mesure son état statique. Sa tension indique un état d'inquiétude ; sa faiblesse, au contraire, est l'indice d'un état de calme » (Bachelier 1900, 53). Ce coefficient représente la volatilité du titre que Bachelier suppose constante dans ses tests.

Bachelier appliqua ensuite son principe d'une double démonstration aux « deux problèmes de la théorie de la spéculation » qu'il proposa de résoudre : le premier établit la probabilité pour qu'un cours donné soit atteint ou dépassé à une époque donnée –c'est-à-dire la probabilité qu'une option européenne soit exercée²¹–, le second cherche la probabilité pour qu'un cours donné soit atteint ou dépassé avant une époque donnée (Bachelier 1900, 81) –ce qui revient à déterminer la probabilité d'exercice d'une option américaine. Précisons que Bachelier n'évoqua absolument pas de ce dernier type d'option qui, à cette époque, n'existait pas sur le marché boursier français. Ses calculs doivent être considérés comme un cas mathématique qu'il explora et absolument pas comme l'étude d'un problème empirique. Comme Regnault, Bachelier testa et valida ses hypothèses en utilisant la rente 3%.

2.2. L'APPORT DE BACHELIER

Fort de ces premiers résultats, Bachelier les généralisa immédiatement dans son article de 1901, « Théorie mathématique du jeu », dans lequel il passe systématiquement du temps discret au temps continu. Il donna ainsi les résultats en temps continu de plusieurs problèmes de la théorie du jeu dont traitait le calcul des probabilités depuis son origine. Bachelier a poursuivi ses recherches sur les probabilités en temps continu en les appliquant à l'ensemble du calcul des probabilités telles que les probabilités à plusieurs variables, les probabilités géométriques, les probabilités cinématiques ou encore les probabilités dynamiques. Ce travail novateur a eu peu d'écho en France –le calcul des probabilités n'y est devenu une discipline reconnue par la communauté universitaire qu'après 1925–,

²¹ Un contrat d'option confère le droit, et non l'obligation, de vendre ou d'acheter un actif financier ou physique, à un prix défini à l'avance –le prix d'exercice–, à une date fixée, appelée échéance. Il existe deux principaux types d'option : les options dites européennes pour lesquelles ce droit ne peut être exercé qu'à l'échéance– et les options dites « américaines » pour lesquelles ce droit peut être exercé à n'importe quel moment jusqu'à l'échéance du contrat. A Paris, à l'époque de Bachelier, ce type d'actif financier se nomme une « prime ».

mais il a connu une certaine diffusion internationale, et en particulier dans le monde anglo-saxon²². Il a de plus influencé Kolmogorov dans son élaboration de la théorie moderne des probabilités.

Du point de vue économique, le travail de Bachelier prolonge celui de Regnault, en particulier par l'utilisation du modèle de marche aléatoire et le principe de la nullité de l'espérance de gain dans la détermination de la probabilité de réussite des options. Bachelier utilise les mêmes hypothèses que Regnault qu'il introduit et présente dans le même ordre. Il conserve, par exemple, la distinction liée au déterminisme entre causes constantes et causes accidentelles qu'il associe à des « probabilités mathématiques » et des « probabilités dépendant de faits à venir et, par conséquent, impossible à prévoir de façon mathématique »²³. Il formalise également l'évolution théorique des cours de la rente comme le fait Regnault dans son second modèle relatif aux variations de long terme de la rente. Bachelier nomme ces cours théoriques les « cours vrais » qui correspondent à l'évolution logique de la rente si les prix ne prenaient en compte que les coupons et les reports (1900, 25)²⁴. Il en tire son principe d'espérance de gain nulle :

« Par considération des cours vrais on peut dire : *Le marché ne croit, à un instant donné, ni à la hausse, ni à la baisse du cours vrai* [correspondant à cet instant] » (1900, 32).

Sur le plan mathématique, l'apport de Bachelier est considérable. Il propose la première formulation mathématique du modèle de marche aléatoire en temps continu, formulation que l'on connaît aujourd'hui sous le nom de processus de Wiener ou de mouvement brownien. A ce titre, la thèse de Bachelier peut être considérée comme le premier travail de mathématiques financières connu. Les outils mathématiques introduits par Bachelier constituent les bases des modèles financiers actuels qui étudient les fluctuations boursières et qui évaluent le prix des titres. Même si la reconnaissance de l'importance des travaux de Bachelier a été tardive, on sait aujourd'hui qu'ils ont influencé certains outils mathématiques que l'on retrouve dans les modèles financiers tels que le processus d'Itô ou l'application du modèle de martingale aux variations boursières proposée par Samuelson et Mandelbrot.

Toutefois, malgré le fait que les travaux de Bachelier et de Regnault n'ont jamais cessé d'être utilisés et enseignés en France²⁵, ils n'ont pas ouvert la voie à une dynamique de recherche. Il fallut attendre la création de la théorie moderne des probabilités et son utilisation par les économistes, à

²² Sur la diffusion et l'influence du travail de Bachelier, voir Taqqu (2001, 22-6), Davis et Ethering (2006), et Jovanovic (2002, 2009).

²³ Voir Jovanovic (2002) sur la conception déterministe de Bachelier.

²⁴ Dans son étude, Bachelier considère que la rente capitalise les dividendes (1900, 24, note 1).

partir de la fin des années 1950, pour que le travail de Bachelier soit redécouvert en économie. Toutefois, l'émergence de l'économétrie, dans les années 1930 aux Etats-Unis, offrit au modèle de marche aléatoire une dynamique de recherche en économétrie financière.

3. 1930-1960, L'INTRODUCTION DU MODELE DE MARCHE ALEATOIRE AUX ETATS-UNIS : L'IMBRICATION AVEC L'ECONOMETRIE

L'imbrication du modèle de marche aléatoire avec l'économétrie trouve son origine aux Etats-Unis dans le contexte des années 1930 lorsque Alfred Cowles fonda, le 9 septembre 1932, la Cowles Commission²⁶. « Victime » du krach boursier de 1929, Cowles s'interrogea alors sur les capacités prédictives des sociétés de gestion de portefeuilles boursiers et des services financiers qui conseillent les investisseurs. Cette recherche le conduisit à entrer en contact avec la toute jeune Société Internationale d'Econométrie. En 1932, il proposa de lui apporter son soutien financier en échange d'un traitement théorique de ses problèmes de prévision des variations boursières et du cycle des affaires. La même année, il constitua un groupe de recherche innovant : la Cowles Commission.

Ce sont deux auteurs liés à cette institution qui ont amorcé, aux Etats-Unis, les recherches sur l'application du modèle de marche aléatoire aux variations boursières, Alfred Cowles (1933, 1944) et Holbrook Working (1934, 1949)²⁷. La non prévision de la crise de 1929 les conduisit à considérer que les variations boursières sont imprévisibles. La défense de cette hypothèse conduisit ces chercheurs à s'opposer aux théories chartistes²⁸ qui prétendaient pouvoir anticiper les variations boursières. Cowles et Working s'engagèrent à montrer que ces théories, qui n'avaient pas permis de prévoir la crise de 1929, n'apportent aucun pouvoir de prédiction. C'est par ce postulat d'imprévisibilité que le modèle de marche aléatoire fut de nouveau utilisé en finance, il permettait de modéliser cette imprévisibilité. Il fut cependant réintroduit indépendamment des travaux de Bachelier et de

²⁵ La diffusion de l'ouvrage de Regnault est présentée dans Jovanovic (2004).

²⁶ Voir l'article de Dimand dans ce numéro.

²⁷ Working ne fut jamais directement rattaché à la Cowles Commission mais participa aux conférences d'été.

²⁸ L'analyse chartiste, également appelée analyse graphique, est une méthode d'investissement basée sur l'étude des cours et des volumes de divers titres cotés. Ces analyses consistent à étudier les graphiques que l'évolution historique de cours crée pour identifier des tendances et des signes de retournement de tendance et, de cette manière, prédire l'évolution des cours d'une valeur ou d'un marché.

Ces théories ont eut une très grande influence ; elle conserve aujourd'hui encore une certaine influence auprès des opérateurs boursiers, mais elles sont peu étudiées par le milieu universitaire.

Regnault ; presque tous les auteurs américains qui ont travaillé en économétrie financière avant 1955 ne connaissaient pas les travaux de Bachelier²⁹.

3.1. UNE MARCHE ALEATOIRE A TOUT PRIX

Working (1934) partit de l'idée que les mouvements des séries de prix « sont essentiellement aléatoires et imprévisibles » (1934, 12). Il construisit une série de différences premières aléatoires cumulées avec des tirages aléatoires générés par une table de Tippett³⁰ qui repose sur une distribution normale. Le travail de Working ne contient aucune formalisation du processus stochastique³¹, cependant on peut donner une interprétation mathématique de son modèle qui est de la forme $\Delta P_{t+1} = \varepsilon_{t+1}$, avec $\Delta P_{t+1} = P_{t+1} - P_t$ et ε_t un bruit blanc. Autrement dit, Working supposa que les prix suivent une marche aléatoire de Bernoulli, $P_{t+1} = P_t + \varepsilon_t$. Il compara ensuite la série des différences premières cumulées avec les séries réelles, et constata que les séries de prix artificiellement créées offrent les mêmes formes graphiques que les séries réelles. Cowles (1933), quant à lui, tenta de déterminer si les professionnels des marchés financiers –services financiers et chartistes– pouvaient prévoir les variations boursières, et donc s'ils pouvaient réaliser des performances supérieures à celle du marché lui-même ou à une gestion aléatoire. Il compara l'évolution du marché aux performances de portefeuilles fictifs constitués à partir des recommandations de 16 professionnels. Il constata que la rentabilité annuelle moyenne des performances de ces portefeuilles était sensiblement inférieure à la performance moyenne du marché et que la meilleure performance aurait pu être obtenue en achetant et en vendant les titres au hasard.

La volonté de ces deux auteurs de montrer l'imprévisibilité des variations boursières les a conduit à des interprétations parfois contestables. Par exemple, lorsque Cowles (1933) compara les performances de 16 portefeuilles fictifs réalisés à partir des recommandations de 16 sociétés de services financiers, il ne tient pas compte du biais induit par l'introduction de ces sociétés dans son échantillon à des périodes de conjoncture économique très différentes. Or, la performance moyenne

²⁹ Notons cependant deux exceptions : Samuelson qui a connu les travaux de Bachelier dans les années 1930 et Arne Fisher qui suggère en 1922 d'appliquer les formules de Bachelier aux titres financiers –voir Jovanovic (2009).

³⁰ Une table de Tippett est une table de « nombres au hasard » également appelée table de « nombres fortuits ». Ces tables sont utilisées pour fabriquer des séries de nombres aléatoires. Il existe plusieurs de ces tables, celle de Tippett, créée en 1927, est la plus ancienne. Elle est constituée de 10400 nombres de 4 chiffres extraits des archives de recensements britanniques du 19ème siècle.

³¹ Rappelons qu'à cette époque, la théorie moderne des probabilités était en pleine construction, et les outils qu'elle développait n'étaient accessibles qu'à un petit cercle de mathématiciens spécialisés.

de ces sociétés n'est pas indépendante de l'environnement économique, en particulier sur la période retenue, du 1^{er} janvier 1928 au 1^{er} juillet 1932³². Dans ce même article, Cowles analyse les prévisions données entre décembre 1903 et décembre 1929 par le « prophète » Hamilton qui était alors le chef de file de l'analyse chartiste. Il conclut que sur 90 recommandations, 45 se sont soldées par un échec : quelle meilleure démonstration de la manifestation du hasard ! Cependant, il existe encore ici un biais. Cowles explique que les indications d'Hamilton sur l'évolution future du marché ou d'un titre n'étaient pas toujours objectivement compréhensibles : dans certains cas, elles étaient si générales qu'il n'était pas possible d'identifier clairement si Hamilton prévoyait une hausse ou une baisse. Pour cette raison, Cowles a soumis les prévisions ambiguës à l'interprétation de son entourage. Brown *et alii* (1998) ont refait les calculs de Cowles sans tenir compte de ces prévisions ambiguës et ont obtenu un résultat opposé : les recommandations de Hamilton permettaient de réaliser une meilleure performance que celle du marché³³.

Aux travaux de Cowles et de Working s'ajouta, en 1953, l'étude statistique du statisticien anglais Maurice Kendall. Il s'interrogea à son tour sur la possibilité de prévoir les prix sur les marchés financiers. Bien que Kendall constata de faibles auto-corrélations dans les séries et de faibles corrélations retardées entre les séries, il conclut que « à moins que les actions individuelles se comportent différemment de la moyenne des actions similaires, il n'y a aucun espoir de prédire les mouvements boursiers une semaine à l'avance sans information extérieure » (1953, 85). Les conclusions de cet auteur restèrent cependant prudentes. Il souligna au moins une exception notable au modèle de marche aléatoire³⁴ et prévient qu'« il est difficile de distinguer, par des méthodes statistiques, une véritable série aléatoire d'une série dans laquelle la composante systématique est faible » (1953, 85).

³² On constate que pour les sociétés entrées dans l'échantillon en 1928 –donc pendant la période de hausse du marché– les portefeuilles fictifs réalisent les meilleures performances, que pour celles entrées au moment du krach (entre mi-1929 et mi-1930) les portefeuilles fictifs obtiennent les moins bons résultats, et que pour la société incorporée dans l'échantillon en 1932, au moment de la reprise économique, le portefeuille fictif obtient une bonne performance. En tenant compte de ces observations, les résultats de Cowles auraient pu être interprétés d'une toute autre manière : lors des périodes de hausse du marché, les performances des sociétés sont meilleures que celle du marché tandis que lors des phases de baisse leurs performances sont moins bonnes. Cette interprétation va dans le même sens que les résultats obtenus par Cowles dans une deuxième étude où il constate que les actions les plus volatiles sont moins rentables que le marché dans son ensemble (Cowles, *et al.* 1937, 288-9). Or, dans une période de crise la volatilité est plus grande –les cours chutent plus vite et il est plus difficile de revendre ses titres– que pendant les périodes de hausse.

³³ Voir également l'article de Dimand dans ce numéro spécial.

³⁴ Kendall montre que le prix du coton aux Etats-Unis admettait une corrélation entre les prix successifs qui pourrait être prédite par des méthodes statistiques.

3.2. LE MANQUE, VOIRE L'ABSENCE, D'EXPLICATION THEORIQUE

Ces nouvelles recherches possédaient une dimension très appliquée et pratique, elles privilégiaient une approche économétrique sans explication théorique dont l'objectif était de valider le postulat d'imprévisibilité des variations boursières, embryon de la théorie de l'efficacité informationnelle qui se développa dans les années 1960. Cet engouement pour les nouvelles pratiques statistiques a complètement occulté les explications théoriques du caractère aléatoire des variations boursières. L'absence d'explication théorique et la faiblesse des résultats furent rappelées avec insistance à partir de la fin des années 1950 par deux des principaux défenseurs du modèle de marche aléatoire, Working (1956, 1958, 1961) et Roberts (1959). Tous deux dressèrent un constat sur les limites de cette situation. Roberts (1959, 15) nota que l'indépendance des variations boursières, qui justifia l'assimilation des variations boursières à une marche aléatoire, n'était pas encore établie (1959, 13). Working souligna également l'absence de vérification du caractère aléatoire des variations boursières. Selon lui, il n'était pas possible de rejeter avec certitude l'analyse chartiste (ou technique) qui se base sur les figures ou des graphiques pour prévoir les variations des cours boursiers. Il expliqua que :

« même si j'ai donné l'impression d'avoir suggéré que ces " configurations techniques " dans les prix observés sont des illusions, ceci n'a pas été démontré » (1956, 1436).

Ces quatre articles amorcèrent une importante rupture dans l'organisation de la recherche relative à l'application du modèle de marche aléatoire aux variations boursières, la rupture des années 1960.

4. 1960-1965, L'ORGANISATION DE LA RECHERCHE ET LE RATTACHEMENT PROGRESSIF DU MODELE DE MARCHE ALEATOIRE A LA THEORIE NEOCLASSIQUE

Pour l'économie financière, les années 1960 constituent, aux Etats-Unis, une rupture à plusieurs égards³⁵. Il faut d'abord préciser que cette discipline fut reconnue comme scientifique à partir de cette décennie (Jovanovic 2008). Pendant les années 1960, le milieu universitaire américain s'intéressa de plus en plus aux marchés financiers américains à cause de leur important développement pendant cette décennie avec, entre autres, une hausse des cours quasiment ininterrompue³⁶. Parallèlement, la recherche théorique s'est enrichie de nouveaux outils. Les premiers ordinateurs ont fait leur

³⁵ Jovanovic (2008) analyse de la création de l'économie financière pendant les années 1960.

³⁶ Voir par exemple, l'article de Poitras dans ce numéro qui revient sur le développement du marché des options dans les années 1970.

apparition dans certains centres de recherche universitaires. De plus, le développement de la théorie des probabilités³⁷ rendit les outils de calcul stochastique accessibles aux économistes, ce qui leur permit de découvrir les travaux de Bachelier. Enfin, les recherches ont bénéficié des travaux d'une nouvelle génération d'économistes qui entreprirent leur 3^{ème} cycle au début des années 1960. Ces nouveaux arrivants ne travaillaient plus de manière isolée, ils travaillaient au sein des groupes de recherches américains qui développèrent les fondements théoriques de l'économie financière que l'on connaît aujourd'hui. Deux pôles jouèrent un rôle important dans l'élaboration des fondements théoriques du caractère aléatoire des variations boursières : le MIT et le CRSP³⁸.

Dès 1960 James Lorie et Lawrence Fisher mirent en place un ambitieux programme de recherche, au sein de la *Graduate School of Business* de l'Université de Chicago, qui s'est étalé sur 4 ans (Lorie 1965, 3). Roberts travaillait avec ces deux professeurs qui créèrent le *Center for Research in Security Prices (CRSP)*. Ce centre bénéficia d'un des premiers ordinateurs, d'un important groupe de doctorants et d'un très substantiel financement accordé par un pool bancaire. Merton Miller les rejoignit un an plus tard, en 1961³⁹. Un de leurs buts était de construire une immense base de données informatique sur les cours boursiers pour déterminer la profitabilité des différents placements. Un de leurs points de départ était la défense radicale et sans compromis de la marche aléatoire des cours boursiers. Fama était d'ailleurs « le plus fervent et le plus prolifique partisan du hasard » (Lorie 1965, 17).

Un nouveau pôle de recherche fut également ouvert au M.I.T. au sein duquel travaillaient Cootner, Samuelson, Treynor, Modigliani. Ils bénéficiaient également d'un des premiers ordinateurs. Les économistes du MIT défendaient une position opposée à celle développée au CRSP : les marchés financiers ne sont pas parfaits et, par conséquent, les variations boursières ne suivent pas exactement une marche aléatoire. Ils appuyaient en partie cette hypothèse sur l'hypothèse keynésienne de « normal backwardation » des prix des biens.

Ces recherches bénéficiaient de revues scientifiques spécialisées telles que le *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, créé en 1965, le *Journal of Business*, ou le *Journal of Finance*. Bien que plus anciennes, ces deux dernières changèrent leur politique éditoriale pendant cette période et optèrent pour des articles plus mathématisés et davantage tournés vers la modélisation mathématique (Bernstein 1995, 47-6 et 132). L'institutionnalisation et le développement de la recherche en théorie

³⁷ Sur l'histoire de la théorie moderne des probabilités, voir von Plato (1994).

³⁸ Les oppositions théoriques entre ces deux pôles sont analysées par Jovanovic (2008).

³⁹ Notons que ce centre fut également dirigé par Fisher Black auquel succéda Myron Scholes. Tous deux sont à l'origine du modèle d'évaluation du prix des options publié en 1973.

financière ont largement contribué à la diffusion ainsi qu'à l'adoption du modèle de marche aléatoire. Ils ont surtout permis de faire émerger une communauté scientifique homogène avec un thème et un langage communs, des revues scientifiques ainsi que des enseignements dans les universités. Cette communauté permit d'insérer l'économie financière dans un champ scientifique. Trois axes de recherches furent initiés pendant les années 1960 : 1) l'intensification des études économétriques ; 2) l'amélioration du modèle de marche aléatoire ; 3) la recherche d'un contenu théorique au modèle de marche aléatoire.

4.1. L'INTENSIFICATION DES RECHERCHES ECONOMETRIQUES

L'intensification des études économétriques révéla des résultats très partagés. Les économistes liés au *CRSP* –comme Moore (1962) ou King (1964)– validèrent le modèle de marche aléatoire, ainsi que Osborne (1959, 1962), Granger et Morgenstern (1963, 1964). En revanche, les résultats issus des travaux du MIT et de l'Université de Harvard établirent des dépendances dans les variations boursières. Par exemple, Alexander (1961), Houthakker (1961)⁴⁰, Cootner (1962), Weintraub (1963), Steiger (1963) ou Niederhoffer (1965) soulignèrent la présence de tendances. Des tendances avaient déjà été constatée par certains des tenants de la marche aléatoire, en particulier par Cowles qui, dans ses articles de 1937 et 1944, avait constaté un biais offrant la possibilité de prévoir les variations futures des cours boursiers. Suite à une remarque de Working (1960)⁴¹ sur l'explication statistique de ces « prétendues tendances », il reprit ses calculs dans son article de 1960, et obtient toujours le même résultat (Cowles 1960, 914).

Cette intensification des travaux économétriques conduisit à la publication de plusieurs ouvrages qui firent le bilan de la représentation des fluctuations boursières par un modèle de marche aléatoire. Citons entre autres le recueil d'articles édité en 1964 par Paul Cootner, *The Random Character of Stock Market Prices*, et qui rassemble pour la première fois des articles exclusivement consacrés à l'application du modèle de marche aléatoire aux variations boursières⁴². On y trouve entre autres la

⁴⁰ Houthakker montre aussi que la loi normale n'est pas vérifiée car la distribution des séries de prix est beaucoup plus leptokurtique (1961, 168).

⁴¹ Cowles et Jones (1937) avaient obtenu une dépendance statistique sur des moyennes mensuelles ou hebdomadaires de cours quotidiens. Working (1960) explique que dans ce cas il est possible d'obtenir une certaine dépendance car les analyses statistiques basées sur les moyennes des cours peuvent introduire des corrélations artificielles entre les variations consécutives.

⁴² Cet ouvrage a eu un très grand impact et les introductions des chapitres ont fourni une première présentation de l'histoire canonique de l'économie financière.

traduction anglaise de la thèse de Bachelier par Boness. Deux ans plus tard, en 1966, le *Journal of Business*, la prestigieuse revue économique de l'Université de Chicago, consacra un numéro spécial aux « recherches quantitatives et formalisées récentes sur les marchés financiers ». Ce fut le moyen de faire un premier bilan des axes de recherches développés par l'équipe du *CRSP*. Enfin, en 1968, trois ans après sa création, le *Journal of Financial and Quantitative Analysis* publie un numéro spécial sur l'application du modèle de marche aléatoire aux variations boursières.

4.2. L'AMELIORATION DU MODELE DE MARCHE ALEATOIRE

Parallèlement au développement des travaux économétriques, plusieurs auteurs entreprirent de donner une formulation mathématique aux premiers travaux d'économétrie financière, et d'améliorer la concordance du modèle de marche aléatoire avec les données empiriques. La recherche de cette formulation mathématique a été permise grâce à la diffusion des processus stochastiques et à leur plus grande facilité d'accès pour des non mathématiciens. Cette diffusion a également conduit les économistes anglo-saxons à découvrir le travail de Bachelier⁴³.

En 1959, Osborne, constatant que la distribution des prix ne suivait pas une distribution normale, fut conduit à procéder à une transformation log-linéaire afin d'obtenir une distribution normale. Selon Osborne, cette distribution facilitait les tests empiriques et les liens avec les résultats obtenus dans d'autres disciplines scientifiques. Il proposa également de raisonner sur le logarithme du rapport des prix, $\log\left(\frac{p_{t+1}}{p_t}\right)$, qui constitue une assez bonne approximation de la rentabilité pour des petits écarts (Osborne 1959, 149). Il justifia ce changement par la manière dont les individus perçoivent des phénomènes : « par hypothèse le niveau absolu des prix n'est pas significatif, seuls les changements dans les prix (en particulier $\Delta \log_e P$ ou le \log_e [le logarithme népérien] du rapport des prix) peuvent être mesurés par un opérateur ou un investisseur » (1959, 149). Il montra alors que les écarts du logarithme du rapport des prix sont bien proportionnels à la racine carrée du temps, et valida empiriquement ce résultat. Ce changement, qui conduit donc à raisonner sur les rentabilités

⁴³ Voir Jovanovic (2008).

des titres et non plus sur les différences de prix elles-mêmes, fut conservé dans les travaux ultérieurs, car il permet de s'assurer de la stationnarité du processus stochastique⁴⁴.

Parallèlement, plusieurs auteurs tentèrent de formaliser des résultats empiriques selon lesquels la distribution des cours boursiers était leptokurtique, une caractéristique étrangère à la loi normale. Dès la constitution des premières bases de données statistiques de prix, les auteurs avaient remarqué que les distributions n'étaient pas celles d'une loi normale et qu'elles étaient leptokurtiques⁴⁵. Cependant, l'intégration de ce caractère de la distribution dans les modèles mathématiques utilisés en finance n'intervint que pendant les années 1960 grâce à l'accès aux outils de la théorie moderne des probabilités. En 1962, Mandelbrot suggéra de substituer à la loi normale les lois stables à variance infinie de Paul Lévy dont la loi normale est un cas particulier. Fama (1963, 1965a) testa cette hypothèse avant de l'abandonner à cause de sa manipulation plus difficile et pour des raisons épistémologiques largement défendues à l'Université de Chicago⁴⁶ : entre plusieurs modèles qui rendent compte d'un même phénomène, il faut choisir le plus simple (Fama 1976b, 26).

Enfin, Samuelson (1965) et Mandelbrot (1966) critiquèrent le caractère trop restrictif du modèle de marche aléatoire qui était contredit par l'existence de corrélations empiriques dans les mouvements des prix. Ce constat les incita à le remplacer par un modèle moins restrictif : le modèle de martingale. Rappelons qu'une suite de variables aléatoires P_t adaptée à $(\Phi_n; 0 \leq n \leq N)$ est une martingale si $E(P_{t+1}/\Phi_t) = P_t$, où $E(\cdot/\Phi_t)$ désigne l'espérance conditionnelle par rapport à (Φ_t) qui est une filtration⁴⁷ c'est-à-dire, en utilisant la terminologie financière, un ensemble d'informations qui augmente au cours du temps –l'indice t représentant le temps. Cela signifie que la meilleure estimation –au sens des moindres carrés– que l'on puisse faire à l'époque t du prix de l'actif en $t+1$, P_{t+1} , à partir des informations disponibles à la date t , Φ_t , est le prix en t , P_t –on suppose que $P_t \in \Phi_t$. Une marche aléatoire est donc une martingale. Cependant, la martingale se définit uniquement par

⁴⁴ Samuelson donna une autre explication du recours aux logarithmes et qui est souvent avancée : « le mouvement brownien de Bachelier conduit à des valeurs négatives pour $X_{t,T}$ avec une forte probabilité. Désormais, une meilleure hypothèse pour un modèle économique est [le rapport des prix]. En travaillant avec des ratios au lieu de différences algébriques, on considère des logarithmes ou des changements en pourcentage qui sont sujets à des probabilités uniformes » ((1965a), p. 15-6).

⁴⁵ Mitchell (1915) ou Mills (1927, chap. 3) soulignèrent ce caractère leptokurtique. Puis, à partir des premiers travaux d'économétrie ce caractère fut souvent rappelé, comme chez Kendall (1953) ou Cootner (1962).

⁴⁶ Voir en particulier les positions défendues par Milton Friedman (1953).

⁴⁷ Formellement, ces définitions prennent place dans un espace de probabilité (Ω, F, P) muni d'une filtration $(\Phi_n)_{0 \leq n \leq N}$. Une filtration est une famille croissante –ou décroissante– de tribus Φ_i : $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Phi_3 \dots \subset \Phi_{n-1} \subset \Phi_n$, une tribu étant une famille de parties, vérifiant des hypothèses de stabilité, de l'ensemble des états de la nature, Ω . La tribu Φ_t

l'espérance conditionnelle ; elle n'impose donc aucune restriction d'indépendance statistique ni de stationnarité sur les moments conditionnels supérieurs. En revanche, la marche aléatoire impose que tous les moments de la série soient indépendants. Précisons enfin que si les prix boursiers suivent une martingale, l'espérance du gain, y , entre deux périodes consécutives est nulle, $E(y_{t+1} / \Phi_t) = 0$, compte tenu de l'information Φ_t . Autrement dit, il s'agit d'un jeu équitable comme l'est aussi la marche aléatoire. Suite aux articles de Samuelson et de Mandelbrot, les mouvements aléatoires des cours boursiers ont été représentés au moyen de martingales.

4.3. LA RECHERCHE D'UN CONTENU THEORIQUE

Le troisième axe de recherche ouvert pendant les années 1960 concernait le contenu théorique du modèle de marche aléatoire dont l'aboutissement fut la théorie de l'efficience informationnelle⁴⁸. Parallèlement à leur constat sur l'absence d'explication théorique au modèle de marche aléatoire, Working (1956, 1958, 1961) et Roberts (1959) furent également les premiers à tenter d'en dégager des pistes de recherche. Roberts proposa un raisonnement qui suggère l'absence d'opportunité d'arbitrage sur les marchés financiers : « si la bourse se comporte comme une roulette mécaniquement imparfaite, les gens remarqueront les imperfections, en profiteront et les feront ainsi disparaître » (Roberts 1959, 13). C'est un de ses collègues de Chicago, Merton Miller, qui, en 1958 avec Franco Modigliani, a introduit en finance cet argument théorique de « preuve par arbitrage ». Celui-ci permet de démontrer l'existence de l'équilibre en incertitude lorsqu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage. De son côté, Working (1956) tissa un premier lien explicite entre l'arrivée imprévisible d'une information et le caractère aléatoire des cours boursiers. L'étape importante fut l'émergence d'un lien entre les résultats économétriques et l'équilibre concurrentiel de la théorie économique. C'est Cowles, dans son article de 1960, qui fit pour la première fois référence à un marché concurrentiel théorique amorçant ainsi un rapprochement avec la théorie économique standard (1960, 914-5). Puis en 1962, Cootner, bien qu'il n'utilisa pas l'expression et qu'il considérait les marchés financiers comme imparfaits, suggéra l'idée de la théorie de l'efficience des marchés financiers :

« la bourse est un marché bien organisé et hautement concurrentiel. Supposez qu'en fait

correspond à la liste des événements dont on peut dire à la date t s'ils sont réalisés ou non. Elle traduit l'ensemble des informations connues à la date t .

⁴⁸ Nous présentons ici une évolution générale qui ne rend pas compte des oppositions théoriques, analysées ailleurs (Jovanovic 2008).

c'est un marché parfait. Tandis que, pris comme un tout, les différents acheteurs ou vendeurs peuvent agir dans l'ignorance, l'ensemble des prix sur le marché reflète complètement la meilleure évaluation de la connaissance actuellement disponible. Si un important groupe d'acheteurs quelconque pensait que les prix étaient trop bas, leurs achats forceraient les prix à augmenter. L'inverse serait vrai pour des vendeurs. En dehors de l'appréciation résultant du gain lié la conservation [des titres], l'espérance conditionnelle du prix de demain, étant donné le prix d'aujourd'hui, est prix d'aujourd'hui » (1962, 25).

Ainsi, au début des années 1960, le caractère aléatoire des variations boursières commença à être associé à la fois à l'équilibre économique d'un marché de libre concurrence et à l'intégration de l'information dans les prix.

Ces réflexions intéressèrent un jeune chercheur, Eugène Fama, qui prit connaissance des travaux de Bachelier en 1963 grâce à un de ses professeurs, Benoît Mandelbrot. Dans sa thèse soutenue en 1964 et publiée un an plus tard dans le *Journal of Business*, Fama esquisse la théorie de l'efficacité informationnelle dont on considère qu'elle donne un contenu théorique au modèle de marche aléatoire.

5. 1965-1976, L'ELABORATION DE LA THEORIE DE L'EFFICIENCE INFORMATIONNELLE : LE CONTENU THEORIQUE ACTUEL DU MODELE DE MARCHE ALEATOIRE

Fama a développé l'intuition selon laquelle le modèle de marche aléatoire vérifierait deux propriétés de l'équilibre économique concurrentiel : l'absence de profit marginal et l'égalisation du prix à la valeur du titre. Indéniablement, ce projet constitue un très beau tour de force : créer une théorie qui permette d'incorporer dans la théorie de l'équilibre économique les résultats économétriques et statistiques sur le modèle de marche aléatoire. C'est à travers ce lien que se joue un des principaux fondements de l'économie financière actuelle et que l'importance du modèle de marche aléatoire s'explique : valider le modèle de marche aléatoire consisterait à établir que les prix sur les marchés financiers sont, par le jeu de la concurrence, en permanence à l'équilibre. C'est aussi grâce à ce lien que l'économie financière fut reconnue comme une discipline scientifique. Etant donné l'enjeu théorique de ce lien entre le modèle de marche aléatoire et la théorie de l'efficacité informationnelle, cette dernière constitue un résultat essentiel, fondé sur un consensus qui conduit à accepter cette hypothèse indépendamment de la question de sa validité (Gillet 1999, 10).

5.1. L'EFFICIENCE PROPOSEE PAR FAMA

Pour établir ce lien, Fama transpose aux marchés financiers le concept d'équilibre de libre concurrence sur lesquels interviennent des agents rationnels (1965b, 56). Un tel marché se caractérise par l'égalisation du prix des titres à leur valeur d'équilibre. Cette dernière est déterminée par un modèle d'évaluation dont le choix est sans importance pour la théorie de l'efficience⁴⁹. En revanche, cette théorie considère que le modèle d'équilibre évalue la valeur des titres en utilisant toute l'information disponible. Ainsi, sur un marché efficient, l'égalisation du prix à la valeur d'équilibre signifie que toute l'information disponible est incorporée dans les cours⁵⁰. Par conséquent, les informations passées ne sont d'aucune utilité pour prévoir l'évolution future des prix, les cours présents et futurs sont indépendants des cours passés. Pour cette raison, Fama considère que, sur un marché efficient, les variations des cours devraient être aléatoires comme l'est l'arrivée de nouvelles informations, et qu'il est impossible de réaliser une performance supérieure à celle du marché (Fama 1965a, 35 ou 98). Ainsi, le modèle de marche aléatoire permettrait de simuler l'évolution dynamique des prix sur un marché de libre concurrence toujours à l'équilibre.

5.2. LES INDISPENSABLES « ECHANGISTES AVERTIS » DE L'ARTICLE DE 1965

Pour démontrer ces propriétés, Fama suppose, dans sa thèse, l'existence d'« échangistes avertis » qui sont les seuls capables d'évaluer au mieux la valeur fondamentale des titres. Il les oppose aux intervenants qui ne possèdent pas cette aptitude et qui sont responsables du bruit [*noise*] sur les marchés. Les « échangistes avertis » se répartissent au sein des deux catégories d'opérateurs connues, les fundamentalistes et les chartistes. « [C]es deux types d'échangistes avertis peuvent être grossièrement considérés comme des maîtres de l'analyse de la valeur intrinsèque [*superior intrinsic-value analysts*] et comme des maîtres du chartisme [*superior chart readers*] ». De plus, Fama suppose qu'« en général, bien qu'il existe parfois des divergences entre les prix courants et les valeurs

⁴⁹ Dans la thèse de Fama, cette valeur d'équilibre correspond à la valeur fondamentale d'un titre –ou valeur intrinsèque. La signification de cette valeur n'a pas d'importance, elle peut correspondre au prix d'équilibre déterminé par un modèle d'équilibre général ou à une convention partagée par les « échangistes avertis » (Fama 1965a, 36, note 3). Par la suite, Fama a abandonné la référence à une convention.

⁵⁰ C'est la définition la plus couramment acceptée de l'efficience, et que Fama a proposée dans son article de 1970 : « un marché sur lequel les prix " reflètent parfaitement " et en permanence l'information disponible est appelé " efficient " » (1970, 383).

intrinsèques, les échangistes avertis sentent que les prix tendent à converger vers des valeurs intrinsèques » (1965a, 37-8). Grâce à leurs qualités, les « échangistes avertis » déterminent mieux que les autres agents la valeur d'équilibre des titres. Ce qui importe ici n'est pas tant leur capacité à déterminer cette valeur d'équilibre que l'existence d'un groupe d'agents qui partagent le même modèle d'évaluation du prix des actifs. Fama y ajoute une hypothèse indispensable à l'égalisation du prix à cette valeur d'équilibre. Pour que le marché soit efficient, il est nécessaire que le nombre d'« échangistes avertis » soit suffisant ou, tout du moins, que leurs capacités financières soient supérieures à celles des autres agents (Fama 1965a, 40). On comprend bien l'importance que tous les « échangistes avertis » partagent le même modèle : disposant de la majorité des ressources financières du marché, leurs seules actions permettent de tendre vers la valeur fondamentale qu'ils partagent.

A partir de ces hypothèses, Fama s'appuie sur le raisonnement par arbitrage introduit pour la première fois par ses collègues, Modigliani et Miller (1958), et utilisé par Roberts (1959) : sur un marché concurrentiel, l'absence d'opportunité d'arbitrage est synonyme d'équilibre. Fama l'utilise pour démontrer que le prix ne peut pas s'écarter de la valeur fondamentale du titre. Si le prix s'en écartait, les « échangistes avertis » pourraient faire un profit dont l'exploitation –ou la tentative d'exploitation– conduirait le prix à revenir à la valeur fondamentale. De même, toute nouvelle information est immédiatement prise en compte dans les cours grâce aux actions des « échangistes avertis » qui savent parfaitement évaluer les conséquences de toute nouvelle information sur la valeur fondamentale. Enfin, l'arrivée des informations ainsi que les effets des nouvelles informations sur la valeur fondamentale sont indépendants. S'il existait des dépendances, les « échangistes avertis » les exploiteraient et de ce fait les annuleraient (1965a, 39). L'indépendance des fluctuations boursières, l'indépendance de l'arrivée des nouvelles informations, et l'absence de profit permettent un lien direct avec le modèle de marche aléatoire. Dit autrement, de par les hypothèses relatives à l'existence de ces échangistes avertis disposant de capacités financières supérieures aux autres intervenants, Fama montra que le caractère aléatoire des variations boursières est synonyme d'équilibre économique dynamique sur un marché de libre concurrence.

5.3. L'ETABLISSEMENT DU LIEN ENTRE EFFICIENCE ET MARCHE ALEATOIRE DANS L'ARTICLE DE 1970

L'intuition du lien entre l'efficience informationnelle et le caractère aléatoire des variations boursières –ou plus précisément l'indépendance des variations boursières– développée dans l'article de Fama

(1965a) restait cependant trop évasive lorsqu'il fallut la démontrer. Fama tenta explicitement de relier la théorie de l'efficience au caractère aléatoire des variations boursières dans son article de 1970. Dans un souci de généralisation, il abandonna toute référence directe à la valeur fondamentale. La question du nombre d'« échangistes avertis » nécessaire pour obtenir l'efficience, à laquelle Fama ne pouvait pas répondre, fut résolue par son élimination. Dorénavant, tous les intervenants possèdent le même modèle d'évaluation du prix des actifs financiers et les agents sont tous supposés rationnels. Enfin, il retint l'hypothèse générale que « les conditions de l'équilibre du marché peuvent être fixées (d'une façon ou d'une autre) en terme de rendements espérés » (1970, 384). Il formalisa cette hypothèse par l'équation suivante :

$$E\left(\tilde{p}_{j,t+1}|\Phi_t\right) = \left[1 + E\left(\tilde{r}_{j,t+1}|\Phi_t\right)\right] p_{j,t}, \text{ avec } r_{j,t+1} = \frac{p_{j,t+1} - p_{j,t}}{p_{j,t}}, \quad (3)$$

où le tilde signale que la variable est aléatoire, p_j et r_j représentent le prix et le rendement d'une période de l'actif j , $E(./.)$ l'opérateur d'espérance conditionnelle et Φ_t l'ensemble d'informations à l'instant t .

L'équation (3) implique que « l'information Φ_t est totalement utilisée dans la détermination du rendement d'équilibre anticipé » (1970, 384). Fama ajoute que « c'est en ce sens que Φ_t est " parfaitement reflétée " dans la formation du prix $p_{j,t}$ » (1970, 384). Afin de tester l'hypothèse d'efficience informationnelle, il suggère que l'on peut obtenir à partir de l'équation (3) l'expression mathématique d'un jeu équitable qui constitue une des caractéristiques du modèle de martingale et du modèle de marche aléatoire. La démonstration de ce lien assurerait que le modèle de martingale ou le modèle de marche aléatoire puissent tester l'efficience des marchés financiers.

Pour montrer ce lien, Fama considéra que les conséquences de l'équation (3) peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$x_{j,t+1} = p_{j,t+1} - E(p_{j,t+1}|\Phi_t), \quad (4)$$

où $x_{j,t+1}$ est le profit (ou la perte) non anticipé(e) par le détenteur de l'action entre t et $t+1$.

Fama en déduisit que :

$$E(\tilde{x}_{j,t+1}|\Phi_t) = 0, \quad (5)$$

signifiant que la plus-value entre deux périodes consécutives conditionnellement à l'ensemble d'informations de la première période est, en moyenne, nulle⁵¹. L'équation (5) définit bien un jeu équitable. De la même manière, en considérant l'erreur d'anticipation de la rentabilité du titre j , \tilde{z}_j , Fama proposa une formulation jugée équivalente :

$$\tilde{z}_{j,t+1} = r_{j,t+1} - E(\tilde{r}_{j,t+1} | \Phi_t). \quad (6)$$

Il en déduisit que :

$$E(\tilde{z}_{j,t+1} | \Phi_t) = 0. \quad (7)$$

Les équations (6) et (7) signifient que, en moyenne, il n'est pas possible de dégager un profit supérieur à la performance du marché. En partant de l'équation (3) et en arrivant aux équations (5) et (7), Fama relierait l'efficacité au modèle de martingale ou au modèle de marche aléatoire. Il serait alors possible de tester la double caractéristique de l'efficacité : la totale incorporation de l'information dans les cours et la nullité du rendement espéré.

5.4. LES CRITIQUES DE LEROY (1976) ET LES MODIFICATIONS APORTEES PAR FAMA

Dès 1976, LeRoy fit remarquer que la déduction de l'équation (5) à partir de l'équation (4) et celle de l'équation (7) à partir de l'équation (6) sont tautologiques –il suffit de prendre l'espérance conditionnelle par rapport à l'information Φ_t . De plus, « ces équations ne peuvent pas caractériser correctement un marché efficient, de quelque façon qu'elles soient définies, car elles sont vraies aussi bien pour la plus naïve des théories de Dow que pour une pure marche aléatoire » (LeRoy 1976, 140). LeRoy indiqua également que les équations (3), (4) et (6) proposées par Fama ne sont pas testables car elles n'imposent aucune restriction sur les données, les termes que l'on compare étant de même nature. Le prix étant formé par le marché, la différence entre le prix anticipé par le marché et le prix réalisé par le marché est nécessairement nulle.

Ces remarques de LeRoy soulignèrent l'absence de démonstration du lien entre l'efficacité et les modèles de marche aléatoire ou de martingale. Fama répondit à ces critiques par un nouvel article, publié en 1976, dans lequel il revient sur la testabilité de l'efficacité. Il reprit sa formulation mathématique et précisa la définition de l'efficacité. Dorénavant, l'efficacité suppose que, selon les

⁵¹ On retrouve ici l'hypothèse des anticipations rationnelles proposée par Muth (1961) et selon laquelle « le prix anticipé est un prédicateur sans biais du prix actuel » (Muth [1961], 333). On peut d'ailleurs remarquer que dès sa thèse Fama a été influencé par les travaux de Muth.

propres termes de Fama, le marché évalue « correctement » la « vraie » distribution de probabilité, soit :

$$f(P_t | \Phi_{t-1}) = f_m(P_t | \Phi_{t-1}^m), \quad (8)$$

où $P_t = (p_{1t}, \dots, p_{nt})$ est le vecteur des prix des actifs à la date t , Φ_{t-1} l'ensemble des informations disponibles à la date $t-1$, Φ_{t-1}^m l'ensemble des informations utilisées par le marché, $f_m(P_t | \Phi_{t-1}^m)$ la fonction de densité pour le vecteur de prix P_t estimée par le marché, et $f(P_t | \Phi_{t-1})$ la « vraie » distribution de probabilité conditionnelle à l'ensemble d'informations disponibles, Φ_{t-1} . Ainsi, sur un marché efficient, les agents disposent du vrai modèle d'évaluation du prix d'équilibre. Pour tester l'équation (8), Fama reformula le rendement anticipé de la manière suivante :

$$p_{j,t-1} = \frac{E_m(\tilde{p}_{j,t} | \Phi_{t-1}^m)}{1 + E_m(\tilde{R}_{j,t} | \Phi_{t-1}^m)}. \quad (9)$$

En réarrangeant les termes on obtient une équation proche de l'équation (3). Cependant, cette nouvelle équation distingue le vrai prix –défini par le vrai modèle d'évaluation– des anticipations par les agents :

$$E_m(\tilde{p}_{j,t} | \Phi_{t-1}^m) = [1 + E_m(\tilde{R}_{j,t} | \Phi_{t-1}^m)] p_{j,t-1}. \quad (10)$$

Cette fois-ci Fama ne donna plus la définition des rendements. Et pour cause, elle peut être déduite de la même équation (9) :

$$E_m(\tilde{R}_{j,t} | \Phi_{t-1}^m) = \frac{E_m(\tilde{p}_{j,t} | \Phi_{t-1}^m) - p_{j,t-1}}{p_{j,t-1}}. \quad (11)$$

Ces équations sont différentes de celles proposées dans l'article de 1970. Les équations (10) et (11) distinguent nettement les variables qui dépendent des anticipations du marché de celles déterminées par le vrai modèle d'évaluation. En utilisant la fonction de distribution pour calculer l'espérance conditionnelle du prix futur, Fama ajouta que si le marché est efficient, c'est-à-dire si l'équation (8) est vérifiée, on obtient :

$$E(\tilde{p}_{j,t} | \Phi_{t-1}) = E_m(\tilde{p}_{j,t} | \Phi_{t-1}^m). \quad (12)$$

Dans ce cas, l'équation (11) s'écrit :

$$E_m(\tilde{R}_{j,t} | \Phi_{t-1}^m) = \frac{E(\tilde{p}_{j,t} | \Phi_{t-1}) - p_{j,t-1}}{p_{j,t-1}}, \quad (13)$$

soit :

$$E_m(\tilde{R}_{j,t}|\Phi_{t-1}^m) = E(\tilde{R}_{j,t}|\Phi_{t-1}). \quad (14)$$

Grâce à l'équation (14), l'efficience peut, en principe, être testée. Le test consiste à vérifier que l'espérance du rendement anticipé par le marché à partir de l'ensemble d'informations, Φ_{t-1}^m , est égale à l'espérance du vrai rendement obtenue à partir de l'ensemble d'informations, Φ_{t-1} . Ce vrai rendement est obtenu en utilisant le « vrai » modèle d'évaluation du prix d'équilibre.

Fama proposa de tester l'efficience à partir de l'équation (14) de deux façons qui reposent sur une même démarche. Le premier test consiste à vérifier que « les stratégies d'échange conduisant à un rendement anticipé anormal n'existent pas » (1976a, 144). Autrement dit, il s'agit de s'assurer que l'on obtient le même rendement que celui fourni par le vrai modèle d'évaluation du prix d'équilibre d'une part et l'information disponible d'autre part. Le second test s'intéresse plus particulièrement à l'ensemble d'informations. Il vérifie qu'il « n'existe aucune autre manière d'utiliser l'information Φ_{t-1} disponible à la période $t-1$ pour anticiper correctement le rendement attendu de l'action j que celle qui permet d'obtenir la valeur d'équilibre anticipée » (1976a, 145). En effet, si $\Phi_t^m = \Phi_t$ et si $E(\tilde{R}_{j,t}|\Phi_{t-1}) = E_m(\tilde{R}_{j,t}|\Phi_{t-1}^m)$, alors les agents possèdent nécessairement le vrai modèle d'évaluation du prix d'équilibre.

Fama parvient au terme de son article à répondre aux critiques de LeRoy : la nouvelle définition de l'efficience est *a priori* testable. Il faut cependant remarquer que la définition de l'efficience a changé, elle se réfère au vrai modèle d'évaluation des prix d'équilibre. Pour cette raison, tester l'efficience nécessite de tester conjointement que les agents utilisent le vrai modèle d'évaluation du prix d'équilibre des actifs⁵². Le test consisterait alors à utiliser un modèle d'évaluation du prix d'équilibre des actifs –le plus simple serait de prendre celui qui est effectivement utilisé par les opérateurs– et à déterminer les rendements que l'information disponible générerait ; puis à utiliser le même modèle avec l'information que les agents utilisent. Si on obtient le même résultat –*i.e.* si l'équation (14) est vérifiée– alors toute l'information disponible est effectivement incorporée dans les cours. Il est frappant de constater que ce test est indépendant du caractère aléatoire des variations boursières. Et pour cause, dans cet article de 1976, il n'est plus question de marche aléatoire ou de martingale ; aucun lien avec un processus aléatoire n'est nécessaire pour tester l'efficience. L'article de 1976 constitue une sorte d'échec du projet de Fama car l'efficience, dans le sens que cet auteur lui donna, n'a pas besoin des modèles de marche aléatoire ou de martingale pour être testée.

⁵² Fama reconnaît les difficultés liées à ce test joint dans un bilan sur l'efficience publié en 1991 (Fama 1991, 1575-6).

5.5. LE LIEN ENTRE EFFICIENCE ET MARCHE ALEATOIRE EN QUESTION

La démonstration mathématique la plus concluante des propositions de Fama fut fournie par Samuelson (1973)⁵³. Celui-ci partit de la définition de la valeur fondamentale, stipulant que le prix des actifs est égal à la somme actualisée des dividendes futurs, et supposa que les dividendes futurs correspondent à des variables aléatoires. Il aboutit à deux résultats. Premièrement, le modèle de martingale est parfaitement compatible avec le modèle d'évaluation de la valeur fondamentale. Deuxièmement, le modèle de martingale est également compatible avec l'existence d'investisseurs qui font systématiquement des profits supérieurs à la moyenne du marché, sans nécessairement avoir une meilleure information que les autres agents.

Ce second résultat est en porte à faux avec les propositions de Fama. Samuelson (1973) proposa deux origines de cette sur-performance : des informations meilleures ou supplémentaires, d'une part, et une meilleure manière d'exploiter les informations disponibles, d'autre part. Dans ce cas, bien que les prix suivent une marche aléatoire, les marchés ne reflètent pas nécessairement toute l'information disponible ou la reflètent mal. De même, LeRoy (1973) comme Lucas (1978) montrèrent que l'efficience informationnelle des marchés financiers et l'hypothèse de martingale sont deux idées distinctes. Plus récemment, en tenant compte de comportements stratégiques, De Meyer et Moussa Saley (2003) montrent que les variations boursières peuvent suivre une martingale alors qu'il existe des agents informés qui connaissent la valeur fondamentale du titre vers laquelle on se dirige et l'utilisent pour réaliser un profit. Ces auteurs montrent que, dans ce cas, non seulement certains agents réalisent un profit mais en plus, toute l'information n'est pas incorporée dans les prix. Ces difficultés ne sont certainement pas étrangères à la définition de l'efficience retenue par LeRoy dans sa synthèse sur « l'efficience des marchés et les martingales » :

« La plupart du temps, dans la littérature empirique, l'efficience d'un marché correspond en pratique à l'association des anticipations rationnelles avec le modèle de martingale, et nous suivrons cette convention » (LeRoy 1989, 1595).

Cette définition renonce cependant à une explication théorique du comportement aléatoire des variations boursières.

⁵³ La démonstration de Samuelson (1973) est une extension de son article de 1965. Dans ces articles, Samuelson poursuit une autre voie théorique qui fut explorée au MIT à partir des années 1960, en particulier par Paul Cootner (Jovanovic 2008).

CONCLUSION

Cet article a interrogé une hypothèse couramment admise : le modèle de marche aléatoire permet de tester l'efficience informationnelle des marchés financiers. Il a montré que la forme mathématique du modèle de marche aléatoire ainsi que les fondements théoriques donnés à ce modèle se sont modifiés au cours du temps. Ce modèle a été successivement utilisé pour montrer la moralité des marchés financiers, l'imprévisibilité des variations boursières et, depuis les travaux de Fama, le bon fonctionnement d'un marché de libre concurrence. Depuis 1970, le modèle de martingale est couramment employé pour tester la forme faible de l'efficience informationnelle des marchés financiers, c'est-à-dire que « les prix " reflètent parfaitement " et en permanence l'information disponible » (Fama 1970, 383)⁵⁴. Cependant, le lien entre modèle de martingale et efficience informationnelle reste fragile et sa démonstration insatisfaisante. Ainsi, si les cours boursiers –ou les rentabilités des titres financiers– semblent aujourd'hui relativement bien aléatoires, au niveau économique, ce constat empirique ne repose pas sur une explication théorique solidement démontrée. Malgré cette insatisfaction, la théorie de l'efficience informationnelle des marchés financiers, le modèle de marche aléatoire, le mouvement brownien et le modèle de martingale conservent une place essentielle dans l'histoire de la théorie financière moderne puisqu'ils sont à l'origine de cette discipline (voir Jovanovic 2008).

BIBLIOGRAPHIE

- Alexander, Sidney S. 1961. Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walk. *Industrial Management Review* 2. 7-26.
- Armatte, Michel. 1991. Théorie des erreurs, moyenne et loi "normale". In *Moyenne, milieu, centre: Histoires et usages*, edited by Feldman, Jacqueline, Gérard Lagneau and Benjamin Matalon, 63-84. Paris: Editions EHESS.
- Bachelier, Louis. 1900. Théorie de la spéculation, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 3ème série* 17. Janvier: 21-86. Réédition 1995, J. Gabay, Paris.
- . 1901. Théorie mathématique du jeu. *Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 3ème série* 18. janvier: 77-119. Réédition, 1995, J. Gabay, Paris.
- Bernstein, Peter L. 1995. *Des idées capitales*. Paris: Presses Universitaires de France.

⁵⁴ Lorsque l'on considère la forme faible de l'efficience informationnelle, l'ensemble des informations utilisé correspond au seul historique des prix passés et des rendements antérieurs. Pour cette raison, on teste, en utilisant les modèles de martingale, qu'il n'existe pas d'auto-corrélation entre les rentabilités passées et les rentabilités à venir.

- Brown, Stephen J., William N. Goetzmann, *et al.* 1998. The Dow Theory: William Peter Hamilton's Track Record Reconsidered. *Journal of Finance* 53. 4: 1311-1333.
- Cootner, Paul H. 1962. Stock prices: Random vs. systematic changes. *Industrial Management Review* 3. 2: 24.
- Courtault, Jean-Michel et Youri Kabanov. 2002. *Louis Bachelier: aux origines de la finance mathématique*. Besançon: Presses Universitaires Franc-Comtoises.
- Cowles, Alfred. 1933. Can Stock Market Forecasters Forecast? *Econometrica* 1. 3: 309-324.
- . 1944. Stock Market Forecasting. *Econometrica* 12. 3/4: 206-214.
- . 1960. A Revision of Previous Conclusions Regarding Stock Price Behavior. *Econometrica* 28. 4: 909-915.
- Cowles, Alfred et Herbert E. Jones. 1937. Some A Posteriori Probabilities in Stock Market Action. *Econometrica* 5. 3: 280-294.
- Davis, Mark et Alison Etheridge. 2006. *Louis Bachelier's Theory of speculation*. Princeton and Oxford: Princeton university press.
- De Meyer, B., Saley, H. M. (2003) On the Strategic Origin of Brownian Motion in Finance. *International Journal of Game Theory* 31, 285-319.
- Dimand, Robert W. "The Cowles Commission and Foundation on the functioning of financial markets from Irving Fisher and Alfred Cowles to Harry Markowitz and James Tobin". Dans ce numéro.
- Fama, Eugene F. 1963. Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis. *Journal of Business* 36. 4: 420-429.
- . 1965a. The Behavior of Stock-Market Prices. *Journal of Business* 38. 1: 34-105.
- . 1965b. Random Walks in Stock-Market Prices. *Financial Analysts Journal* 21. 5: 55-9.
- . 1970. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance* 25. 2: 383-417.
- . 1976a. Efficient Capital Markets: Reply. *Journal of Finance* 31. 1: 143-145.
- . 1976b. *Foundations of finance: portfolio decisions and securities prices*. New York: Basic Books.
- . 1991. Efficient Capital Markets: II. *Journal of Finance* 46. 5: 1575-1617.
- Fama, Eugene F. et Merton H. Miller. 1972. *The theory of finance*. New York: Holt Rinehart and Winston.
- Frankfurter, Georges M. et Elton G. McGoun. 1999. Ideology and the Theory of Financial Economics. *Journal of Economic Behavior & Organization* 39. 159-77.
- Friedman, Milton 1953. *Essays in Positive Economics*. Chicago: University of Chicago Press.
- Gallais-Hamonno, Georges *et alii* (dir.) 2007 *Le marché financier français au XIXe siècle : Tome 2, Aspects quantitatifs des acteurs et des instruments à la bourse de Paris*. Paris: Presses de l'université Paris-Sorbonne.
- Gillet, Philippe. 1999. *L'efficience des marchés financiers*. Paris: Economica.
- Granger, Clive W. J. et Oskar Morgenstern. 1963. Spectral Analysis of New York Stock Exchange Prices. *Kyklos* 16. 1-27.
- Hautcoeur Pierre-Cyrille *et alii* (dir.) 2007 *Le marché financier français au XIXe siècle: Tome 1, Récit*. Paris: Presses de l'université Paris-Sorbonne.
- . 1964. The Random-Walk Hypothesis of Stock Market Behavior. *Kyklos* 17. 1-29.
- Houthakker, Hendrik S. 1961. Systematic and Random Elements in Short-Term Price Movements. *The American Economic Review* 51. 2: 164-172.
- LeRoy, Stephen F. 1973 Risk-aversion and the martingale property of stock prices. *International Economic Review* 14. 2: 436-46.
- Lucas, Robert E. 1978 Asset Prices in an Exchange Economy. *Econometrica* 46. 6: 1429-1445.

- Jovanovic, Franck. 2000. L'origine de la théorie financière: une réévaluation de l'apport de Louis Bachelier. *Revue d'Economie Politique* 110. 3: 395-418.
- . 2001. Pourquoi l'hypothèse de marche aléatoire en théorie financière? Les raisons historiques d'un choix éthique. *Revue d'Economie Financière* 61. 203-211.
- . 2002. *Le modèle de marche aléatoire dans la théorie financière quantitative*. Thèse de doctorat, Université Paris 1, Panthéon-Sorbonne: Paris.
- . 2004. Eléments biographiques inédits sur Jules Regnault (1834-1894), inventeur du modèle de marche aléatoire pour représenter les variations boursières. *Revue d'Histoire des Sciences Humaines* 11. 215-230.
- . 2006a. Was There a “Vernacular Science of Financial Markets” in France during the Nineteenth Century? A Comment on Preda’s “Informative Prices, Rational Investors”. *History of Political Economy* 38. 3: 531-546.
- . 2006b. A nineteenth-century random walk : Jules Regnault and the origins of scientific financial economics. In *Pioneers of Financial Economics*, édité par Geoffrey Poitras, 191-222. Cheltenham: Edward Elgar.
- . 2008. The Construction of the Canonical History of Financial economics. *History of Political Economy* 40. 3: 213-242.
- . 2009. Bachelier a-t-il vraiment été le précurseur oublié que l’on dépeint? Analyse de la diffusion du travail de Louis Bachelier entre 1900 et 2005. Document de travail.
- Jovanovic, Franck et Philippe Le Gall. 2001. Does God practice a random walk? The "financial physics" of a 19th century forerunner, Jules Regnault. *European Journal for the History of Economic Thought* 8. 3: 323-362.
- Kendall, Maurice George. 1953. The Analysis of Economic Time-Series. Part I: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society* 116. 11-25.
- King, Benjamin. 1964. *The Latent Statistical Structure of Security Price Changes*. Thèse de Ph.D., University of Chicago: Chicago.
- Le Gall, Philippe 2007. *A history of econometrics in France : From Nature to models*. Londres: Routledge.
- LeRoy, Stephen F. 1976. Efficient Capital Markets: Comment. *Journal of Finance* 31. 1: 139-141.
- . 1989. Efficient Capital Markets and Martingales. *Journal of Economic Literature* 27. 4: 1583-1621.
- Lorie, James Hirsch. 1965. *Controversies on the Stock Market*. Selected Papers, Graduate School of Business of the University of Chicago.
- Mandelbrot, Benoit. 1962. Sur certains prix spéculatifs ; faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de Paul Lévy. *Comptes Rendus de l'Académie des sciences* séance du 4 juin: 3968-3970.
- . 1966. Forecasts of Future Prices, Unbiased Markets, and "Martingale" Models. *Journal of Business* 39. 1, Part 2: 242-255.
- Mills, Frederick Cecil. 1927. *The behavior of prices*. New York: National bureau of economic research.
- Mitchell, Wesley C. 1915. The Making and Using of Index Numbers. *Bulletin of the United States Bureau of Labor Statistics* 173. 5-114.
- Modigliani, Franco et Merton H. Miller. 1958. The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. *The American Economic Review* 48. 3: 261-297.
- Moore, Arnold B. 1962. Some Characteristics of Changes in Common Stock Prices. In *The Random Character of Stock Market Prices*, édité par Paul H. Cootner, Cambridge, Mass.: M.I.T. Press.
- Muth J. F. 1961 Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica* 29. 3: 315-335.
- Niederhoffer, Victor. 1965. Clustering of Stock Prices. *Operations Research* 13. 2: 258-265.
- Osborne, M. F. M. 1959. Brownian Motion in the Stock Market. *Operations Research* 7. 2: 145-173.

- . 1962. Periodic Structure in the Brownian Motion of Stock Prices. *Operations Research* 10. 3: 345-379.
- Pearson, Karl. 1905a. The Problem of the Random Walk. *Nature* 72. 1865: 294.
- . 1905b. The Problem of the Random Walk (answer). *Nature* 72. 1867: 342.
- Poitras, Geoffrey. 2009. "From Antwerp to Chicago: The History of Exchange Traded Derivative Security Contracts". Dans ce numéro.
- Popper, Karl Raimund. 1959. *The logic of scientific discovery*. New York,: Basic Books.
- Porter, Theodore M. 1986. *The Rise of Statistical Thinking, 1820–1900*, Princeton: Princeton University Press.
- Preda, Alex. 2001. The Rise of the Popular Investor: Financial Knowledge and Investing in England and France, 1840–1880. *Sociological Quarterly* 42. 2: 205–32.
- . 2004. Informative Prices, Rational Investors: The Emergence of the Random Walk Hypothesis and the 19th Century "Science of Financial Investments". *History of Political Economy* 36. 2: 351-386.
- Quételet, Adolphe. 1848. *Du système social et des lois qui le régissent*. Paris: Guillaumin et Cie.
- Regnault, Jules. 1863. *Calcul des chances et philosophie de la bourse*. Paris: Mallet-Bachelier et Castel.
- Roberts, Harry V. 1959. Stock-Market "Patterns" and Financial Analysis: Methodological Suggestions. *Journal of Finance* 14. 1: 1-10.
- Samuelson, Paul A. 1965. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review* 6. 2: 41-49.
- . 1973. Proof that Properly Discounted Present Value of Assets Vibrate Randomly. *Bell Journal of Economics* 4. 2: 369-374.
- Steiger, William Lee. 1963. *Non-randomness in the stock market: a new test on an existent hypothesis*. Thesis M.S., Massachusetts Institute of Technology School of Industrial Management: Cambridge, Mass.
- Taqqu, Murad S. 2001. Bachelier and his Times: A Conversation with Bernard Bru. *Finance and Stochastics* 5. 1: 3-32.
- Von Plato, Jan. 1994. *Creating modern probability: its mathematics, physics, and philosophy in historical perspective*. Cambridge [England]; New York: Cambridge University Press.
- Weintraub, Robert E. 1963. On Speculative Prices and Random Walks A Denial. *Journal of Finance* 18. 1: 59-66.
- Working, Holbrook. 1934. A Random-Difference Series for Use in the Analysis of Time Series. *Journal of the American Statistical Association* 29. 11-24.
- . 1949. The Investigation of Economic Expectations. *The American Economic Review* 39. 3: 150-166.
- . 1953. Futures Trading and Hedging. *The American Economic Review* 43. 3: 314-343.
- . 1956. New ideas and methods for price research. *Journal of Farm Economics* 38. 1427-36.
- . 1958. A Theory of Anticipatory Prices. *The American Economic Review* 48. 2: 188-199.
- . 1960. Note on the Correlation of First Differences of Averages in a Random Chain. *Econometrica* 28. 4: 916-918.
- . 1961. New Concepts Concerning Futures Markets and Prices. *The American Economic Review* 51. 2: 160-163.